

**VŠB – Technická univerzita Ostrava**

**Fakulta strojní**

**Katedra pružnosti a pevnosti**

**Analytické a numerické řešení tenkých a tlustých kroužků pro různé způsoby  
zatěžování**

**Analytical and Numerical Solution of Thin and Thick Rings for Various Loads  
Combination**

**Student:**

**Luboš Pečenka**

**Vedoucí bakalářské práce:**

**Dr. Ing. Ludmila Adámková**

**Ostrava 2009**



Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 22. května 2009

.....

podpis studenta

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména §35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a §60 – školní dílo.
- беру на вѣдомі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o bakalářské práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на вѣдомі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě 22. května 2009

.....

podpis studenta

## **ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

PEČENKA, L. Analytické a numerické řešení tenkých a tlustých kroužků pro různé způsoby zatěžování. Ostrava: katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2009, 79 s. Bakalářská práce, vedoucí Adámková, L.

Bakalářská práce řeší problematiku tenkých a tlustých kroužků pro různé způsoby zatěžování. Práce obsahuje tři různé způsoby zatížení tenkého a tlustého kroužku kruhového nebo čtvercového průřezu. Jedná se o zatížení dvěma silami, čtyřmi silami a tlakem. Kroužky jsou řešeny podle teorie slabě zakřivených prutů a podle teorie silně zakřivených prutů. Výsledky dosažené podle obou těchto teorií jsou navzájem porovnány. Problematika tenkých a tlustých kroužků je také řešena numerickou metodou konečných prvků v programu ANSYS 11.0. Výsledky získané numerickou metodou jsou porovnány s výsledky analytickými.

## **ANNOTATION OF THESIS**

PEČENKA, L. Analytical and Numerical Solution of Thin and Thick Rings for Various Loads Combination. Ostrava: Department of Mechanics of Materials, Faculty of Mechanical Engineering VŠB – Technical University of Ostrava, 2009, 79 p. Thesis, head: Adámková, L.

The bachelor thesis solves the problem of thin and thick rings for various loading cases. The work includes three various loading cases of thin and thick rings with circular or square cross-section. These cases include two applied forces, four applied forces and applied pressure. Rings are solved in accordance both with thin curved beams theory and thick curved beams theory. The results of both these theories are compared with one another. The problem of thin and thick rings is also solved by means of numerical finite element method using ANSYS 11.0 program. The results of numerical solution are compared with the results of analytical solution.

## OBSAH BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

<b>SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ .....</b>	<b>8</b>
<b>1. ÚVOD .....</b>	<b>11</b>
<b>2. TEORIE KŘIVÝCH PRUTŮ .....</b>	<b>12</b>
2.1 ROZDĚLENÍ KŘIVÝCH PRUTŮ .....	12
2.2 SLABĚ ZAKŘIVENÉ PRUTY .....	14
2.2.1 Odvození lineárního rozložení napětí .....	14
2.3 SILNĚ ZAKŘIVENÉ PRUTY .....	15
2.3.1 Odvození nelineárního rozložení napětí .....	15
2.3.2 Výpočet polohy neutrální osy .....	16
2.4 UZAVŘENÉ KŘIVÉ PRUTY (RÁMY) .....	17
2.5 DEFORMAČNÍ ENERGIE .....	18
<b>3. ÚVOD K NUMERICKÉMU ŘEŠENÍ .....</b>	<b>20</b>
<b>4. KROUŽEK ZATÍŽENÝ DVĚMA SILAMI .....</b>	<b>21</b>
4.1 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ .....	22
4.1.1 Slabě zakřivený kroužek .....	22
4.1.2 Silně zakřivený kroužek .....	26
4.2 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ .....	29
4.2.1 Slabě zakřivený kroužek .....	29
4.2.2 Silně zakřivený kroužek .....	33
4.3 POROVNÁNÍ DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ .....	36

<b>5. KROUŽEK ZATÍŽENÝ ČTYŘMI SILAMI .....</b>	<b>37</b>
5. 1    ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ .....	38
5. 1. 1    Slabě zakřivený kroužek .....	38
5. 1. 2    Silně zakřivený kroužek .....	42
5. 2    NUMERICKÉ ŘEŠENÍ .....	45
5. 2. 1    Slabě zakřivený kroužek .....	45
5. 2. 2    Silně zakřivený kroužek .....	49
5. 3    POROVNÁNÍ DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ .....	52
<b>6. POLOVINA KROUŽKU ZATÍŽENÁ TLAKEM .....</b>	<b>53</b>
6. 1    ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ .....	54
6. 1. 1    Slabě zakřivená polovina kroužku .....	54
6. 1. 2    Silně zakřivená polovina kroužku .....	58
6. 2    NUMERICKÉ ŘEŠENÍ .....	60
6. 2. 1    Slabě zakřivená polovina kroužku .....	60
6. 2. 2    Silně zakřivená polovina kroužku .....	64
6. 3    POROVNÁNÍ DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ .....	67
<b>7. ZÁVĚR .....</b>	<b>68</b>
<b>8. SEZNAM POUŽITÝCH PRAMENŮ .....</b>	<b>70</b>
<b>9. PŘÍLOHY .....</b>	<b>71</b>
9.1    MAKRO – KROUŽEK ZATÍŽENÝ DVĚMA SILAMI .....	72
9.2    MAKRO – KROUŽEK ZATÍŽENÝ ČTYŘMI SILAMI .....	75
9.3    MAKRO – POLOVINA KROUŽKU ZATÍŽENÁ TLAKEM .....	78

## SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ

Veličina	Označení	Jednotka
C	integrační konstanta	$[\text{N}\cdot\text{mm}^{-3}]$
E	modul pružnosti v tahu	$[\text{MPa}]$
F	síla	$[\text{N}]$
$F_D$	fiktivní síla nulové hodnoty	$[\text{N}]$
$F_j$	označení obecného silového účinku působícího v určitém bodě tělesa	$[\text{N}\cdot\text{mm}, \text{N}]$
$F_x$	síla působící ve směru osy x	$[\text{N}]$
$F_y$	síla působící ve směru osy y	$[\text{N}]$
$F_z$	síla působící ve směru osy z	$[\text{N}]$
G	modul pružnosti ve smyku	$[\text{MPa}]$
J	osový moment setrvačnosti plochy příčného řezu	$[\text{mm}^4]$
K	velikost strany čtvercového průřezu	$[\text{mm}]$
$M_o$	ohybový moment	$[\text{N}\cdot\text{mm}]$
$M_{oD}$	ohybový moment s ohledem na fiktivní sílu	$[\text{N}\cdot\text{mm}]$
$M_{oe}$	extrémní hodnota ohybového momentu	$[\text{N}\cdot\text{mm}]$
$M_{omax}$	maximální ohybový moment	$[\text{N}\cdot\text{mm}]$
$M_x$	moment působící kolem osy x	$[\text{N}\cdot\text{mm}]$
$M_y$	moment působící kolem osy y	$[\text{N}\cdot\text{mm}]$
$M_z$	moment působící kolem osy z	$[\text{N}\cdot\text{mm}]$
N	normálová síla	$[\text{N}]$
$N_D$	normálová síla s ohledem na fiktivní sílu	$[\text{N}]$
$N_e$	extrémní normálová síla	$[\text{N}]$
P	síla	$[\text{N}]$
Q	označení pohledu	$[-]$
R	poloměr zakřivení střednice	$[\text{mm}]$
$R_A$	reakce	$[\text{N}]$
$R_B$	reakce	$[\text{N}]$
S	plocha průřezu	$[\text{mm}^2]$
T	posouvající síla	$[\text{N}]$
$T_D$	posouvající síla s ohledem na fiktivní sílu	$[\text{N}]$



$T_S$	označení těžiště	[-]
$U$	celková potenciální energie deformace	[J]
$U_{M_0}$	potenciální energie deformace od ohybového momentu	[J]
$U_{M_0N}$	pot. energie deformace $M_0$ , který se pootočí o úhel natočení řezu	[J]
$U_N$	potenciální energie deformace od normálové síly	[J]
$U_T$	potenciální energie deformace od posouvající síly	[J]
$W_o$	průřezový modul v ohybu	[mm <sup>3</sup> ]
$X_i$	staticky neurčitá veličina	[N·mm, N]
$Z$	libovolně zvolená souřadnice	[mm]
$d$	průměr kruhového průřezu	[mm]
$dF_\alpha$	elementární síla působící pod úhlem $\alpha$	[N]
$dS$	elementární plocha	[mm <sup>2</sup> ]
$ds$	element křivky (pro tlusté křivé pruty)	[mm]
$dx$	element křivky (pro tenké křivé pruty)	[mm]
$d\gamma$	elementární úhel	[°]
$d\delta$	elementární úhel	[°]
$dp$	elementární délka	[mm]
$h$	výška profilu v rovině střednice	[mm]
$p$	měrný tlak	[MPa]
$r$	poloměr neutrální osy	[mm]
$s$	označení integrační křivky	[mm]
$x$	označení směru souřadnice	[mm]
$y$	označení směru souřadnice	[mm]
$z$	označení směru souřadnice	[mm]
$z_o$	posunutí vzhledem ke střednici	[mm]
$\Delta L$	celková složka posunutí	[mm]
$\Delta L_{M_0}$	posunutí od ohybového momentu	[mm]
$\Delta L_{M_0N}$	složka posunutí $M_0$ , který se pootočí o úhel natočení řezu	[mm]
$\Delta L_N$	složka posunutí od normálové síly	[mm]
$\Delta L_T$	složka posunutí posouvající síly	[mm]
$\Delta ds$	elementární prodloužení (pro tlusté křivé pruty)	[mm]
$\Delta dx$	elementární prodloužení (pro tenké křivé pruty)	[mm]

$\Delta d\gamma$	elementární úhel zvětšený o elementární prodloužení	[°]
$\Delta_j$	deformace v obecném místě a směru působícího silového účinku	[mm, °]
$\Delta\sigma$	odchylka napětí	[%]
$\Delta\varphi_A$	úhel natočení	[°]
$\alpha$	úhel, pod kterým působí elementární síla $dF\alpha$	[°]
$\beta$	součinitel nerovnoměrného rozložení smykového napětí	[-]
$\mu$	Poissonovo číslo	[-]
$\rho$	poloměr křivosti libovolného vlákna	[mm]
$\sigma_{\max}$	maximální ohybové napětí	[MPa]
$\sigma_o$	ohybové napětí	[MPa]
$\sigma_p$	napětí přímých prutů	[MPa]
$\sigma_{\text{red}}$	redukované napětí	[MPa]
$\sigma_{t(d)}$	tahové (tlakové) napětí	[MPa]
$\sigma_z$	napětí zakřivených prutů	[MPa]
$\tau$	smykové napětí	[MPa]
$\varphi$	libovolně zvolený úhel pomyslného řezu	[°]
$\varphi_e$	extrémní hodnota zvoleného úhlu	[°]

## 1. ÚVOD

Kroužky, kterými se tato práce bude zabývat, můžeme obecně chápat jako uzavřené křivé pruty (rámy). Křivé pruty se rozdělují na slabě zakřivené (tenké) a silně zakřivené (tlusté). Ve strojním oboru se nejvíce využívají pruty, jejichž příčný průřez má osu symetrie ležící v rovině prutu. Lomené pruty, které jsou sestaveny z přímých částí a jsou ve stykových bodech pevně spojeny, můžeme rovněž přiřadit ke křivým prutům. V praxi považujeme za křivý prut například jeřábový hák, řetězový článek, pístní kroužek, obloukovou konstrukci nebo také hodinové pero.

Bakalářská práce se zabývá analytickým a numerickým řešením těchto kroužků pro různé způsoby zatěžování. Nejprve byl řešen kroužek zatížený pouze dvěma silami. Poté byl analyzován kroužek zatížený čtyřmi silami a jako poslední byl uveden příklad pouze poloviny kroužku zatěžované tlakem po vnějším obvodu. Rozměry kroužku byly záměrně voleny na hranici, podle níž se výpočet rozděluje podle teorie tenkých nebo tlustých prutů. Proto bylo možné porovnat výsledky podle obou těchto teorií a poté je srovnat s výsledky numerickými. Numerické výpočty byly provedeny metodou konečných prvků v programu ANSYS 11.0.

## 2. TEORIE KŘIVÝCH PRUTŮ

Jak již bylo řečeno v úvodu, mezi křivé pruty se řadí i lomené pruty. Lomený prut je těleso, jehož střednice je spojitá, po částech hladká křivka. Tyto části mohou být přímé nebo zakřivené. Zakřivený prut na rozdíl od lomeného, má střednici hladkou a spojitou křivku. Tvar křivých prutů je určen tvarem jejich střednice a tvary průřezů v jednotlivých bodech střednice.

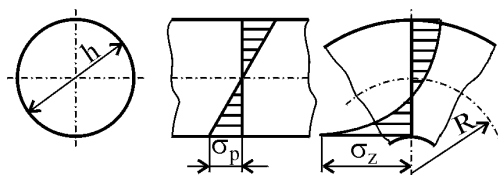
### 2.1 ROZDĚLENÍ KŘIVÝCH PRUTŮ

Podle celkové geometrie rozdělujeme křivé pruty na tenké a tlusté. Je-li poměr poloměru zakřivení střednice  $R$  vzhledem k výšce profilu  $h$  v rovině střednice menší než pět, jedná se o prut silně zakřivený (tlustý), v ostatních případech se jedná o prut slabě zakřivený (tenký).

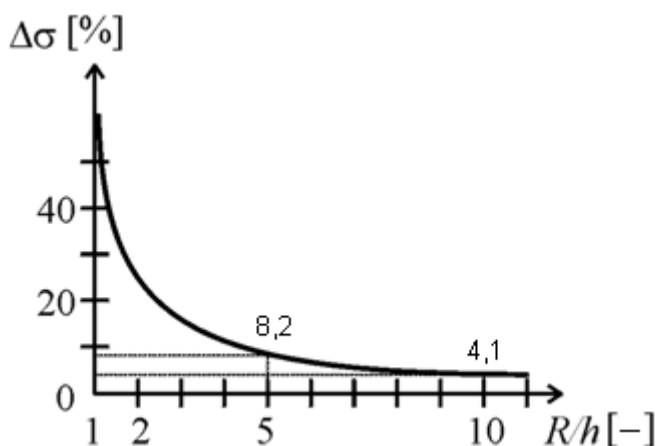
Kvantifikované rozčlenění prutů na slabě a silně zakřivené souvisí s rozlišovací úrovní určování napětí. Pro porovnání výpočtu průběhu napětí při použití vztahů pro pruty zakřivené  $\sigma_z$  a pro pruty přímé  $\sigma_p$  (viz. Obr. 1) vyneseme závislost  $\Delta\sigma$  ( $R/h$ ) (viz. Obr. 2), kde

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_z - \sigma_p}{\sigma_z} \cdot 100\% [7]. \quad (1)$$

Poměr  $R/h$  charakterizuje relativní zakřivení prutu,  $\Delta\sigma$  je odchylka napětí  $\sigma_p$  od  $\sigma_z$ . Z Obr. 2 je patrné, že průběh napětí u prutů slabě zakřivených, pro něž platí  $h \ll R$  (velké  $R/h$ ), je možno řešit užitím vztahu pro pruty přímé. Při poměru  $R/h = 10$  se dopustíme chyby 4,1%, pro  $R/h = 5$  bude chyba 8,2%.

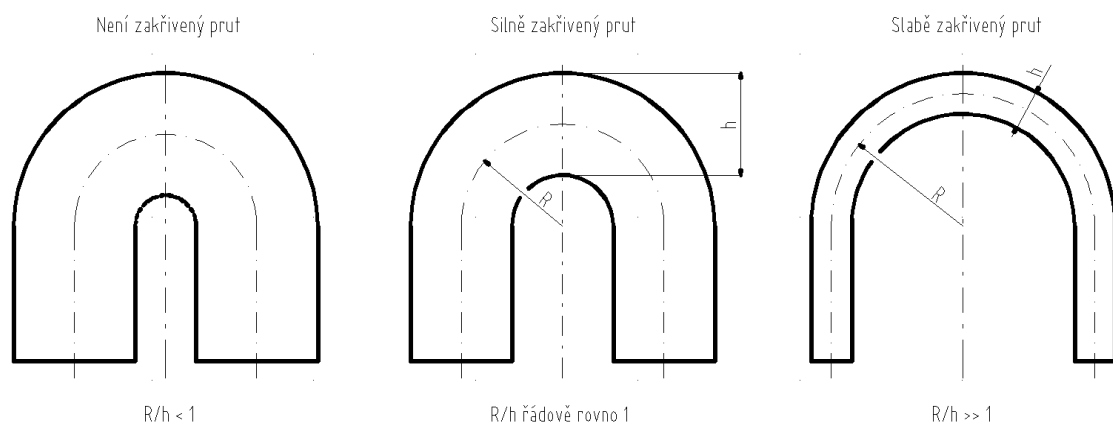


Obr. 1 – Průběhy napětí



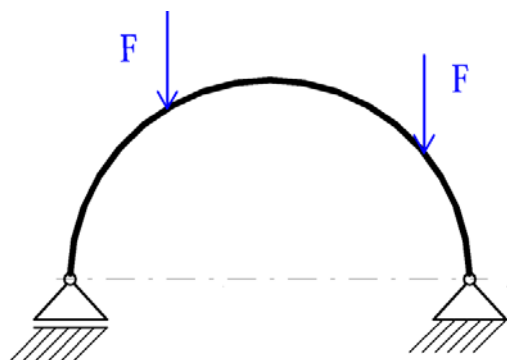
Obr. 2 – Závislost poměru  $R/h$  na veličině  $\Delta\sigma$

Průběh napětí u prutů silně zakřivených s poměrem  $R/h < 5$  je hyperbolický, extrémní hodnota napětí je vyšší a musíme ji počítat pomocí vztahů pro pruty zakřivené nebo dnes již metodou konečných prvků. Vzorce pro silně zakřivené pruty byly odvozeny za předpokladu zachování rovinnosti příčných průřezů v procesu zatěžování a existence prutové napjatosti. Avšak napjatost u silně zakřivených prutů bude obecnější než prutová. Tělesa lze proto řešit jako silně zakřivené pruty jen do poměru  $R/h$  řádově rovného jedné (viz. Obr. 3).

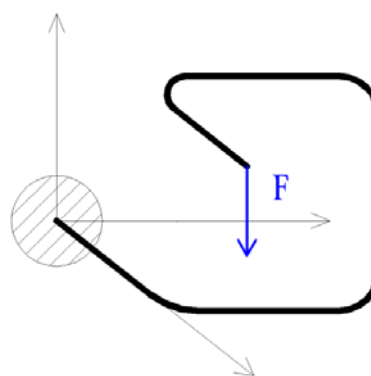


**Obr. 3 – Rozdělení zakřivených prutů**

Křivé pruty rozdělujeme dle uspořádání na rovinné křivé pruty a prostorové křivé pruty.

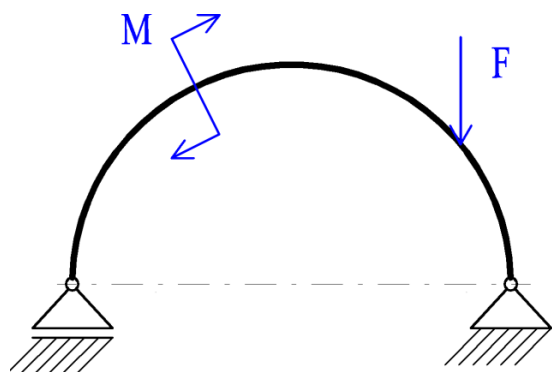


**Obr. 4 – Rovinný křivý prut**

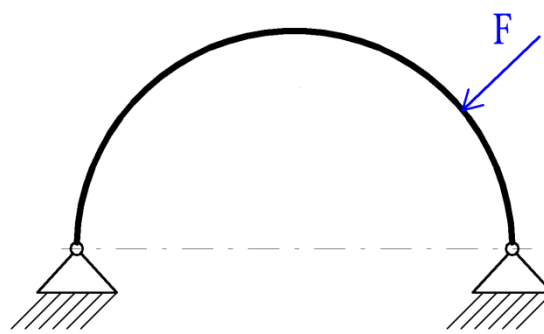


**Obr. 5 – Prostorový křivý prut**

Nebo se dělí podle uložení na staticky určité a staticky neurčité.



**Obr. 6 – Staticky určitý křivý prut**



**Obr. 7 – Staticky neurčitý křivý prut**

## 2.2 SLABĚ ZAKŘIVENÉ PRUTY

Křivý prut se pokládá za slabě zakřivený (tenký), jeli poměr  $R/h \geq 5$ , kde  $R$  je poloměr zakřivení střednice a  $h$  je výška profilu v rovině střednice. U těchto prutů můžeme s dostatečnou přesností předpokládat stejné rozložení napětí jako u prutů přímých. Neutrální osa prochází těžištěm příčného řezu a napětí jsou úměrná vzdálenosti od neutrální osy.

### 2.2.1 Odvození lineárního rozložení napětí

Z podobnosti trojúhelníků vypočteme osovou deformaci  $\varepsilon$ :

$$\frac{r}{dx} = \frac{Z}{\Delta dx} \rightarrow \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{Z}{r} = \varepsilon(Z). \quad (2)$$

Za předpokladu platnosti Hookova zákona určíme osové (ohybové) napětí  $\sigma_o$  jako funkci souřadnice  $Z$ :

$$\sigma_o(Z) = E \cdot \varepsilon(Z). \quad (3)$$

Dosazením za  $\varepsilon$  dostaneme:

$$\sigma_o(Z) = \frac{E}{r} \cdot Z = C \cdot Z. \quad (4)$$

Z momentové rovnováhy

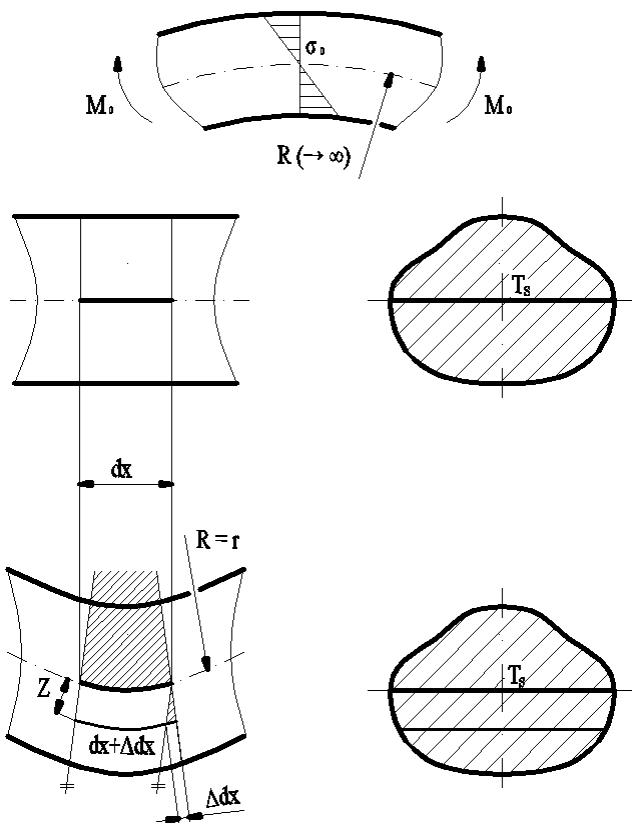
$$\int_{(S)} Z \cdot \sigma_o(Z) \cdot dS = M_o \quad (5)$$

určíme konstantu  $C$ :

$$C = \frac{M_o}{J}. \quad (6)$$

Výsledný vztah pro tenké křivé pruty:

$$\sigma(Z) = \frac{M_o}{J} \cdot Z. \quad (7)$$



Obr. 8 – Odvození lineárního rozložení napětí

U slabě zakřivených prutů lze obdobně jako u přímých prutů uvažovat pouze namáhání v ohybu. Rovněž posuvy jednotlivých bodů slabě zakřivených prutů lze stanovit na základě rovnic odvozených pro přímé pruty. Předpokládá se, že platí zákon superpozice posuvů, a proto posuvy a úhly natočení lze určit pomocí Castiglianovy věty.

## 2.3 SILNĚ ZAKŘIVENÉ PRUTY

Je-li poměr  $R/h$  menší než pět, jedná se o prut silně zakřivený, někdy nazývaný tlustý křivý prut. Dále budou vyšetřovány křivé pruty se symetrickými příčnými průřezy, jejichž osy symetrie leží v rovině střednice křivého prutu. Neutrální osa u tlustého křivého prutu neprochází těžištěm.

### 2.3.1 Odvození nelineárního rozložení napětí

Z délek částí oblouků určíme osovou deformaci  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon(Z) = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{Z \cdot \Delta d\gamma}{(r + Z) \cdot d\gamma}. \quad (8)$$

Za předpokladu platnosti Hookova zákona určíme osové (ohybové) napětí  $\sigma_o$  jako funkci souřadnice  $Z$ :

$$\sigma_o(Z) = E \cdot \varepsilon(Z) \rightarrow \sigma(Z) = E \cdot \frac{Z}{(r + Z)} \cdot \frac{\Delta d\gamma}{d\gamma}. \quad (9)$$

Z momentové rovnováhy

$$\int_{(S)} Z \cdot \sigma_o(Z) \cdot dS = M_o \quad (10)$$

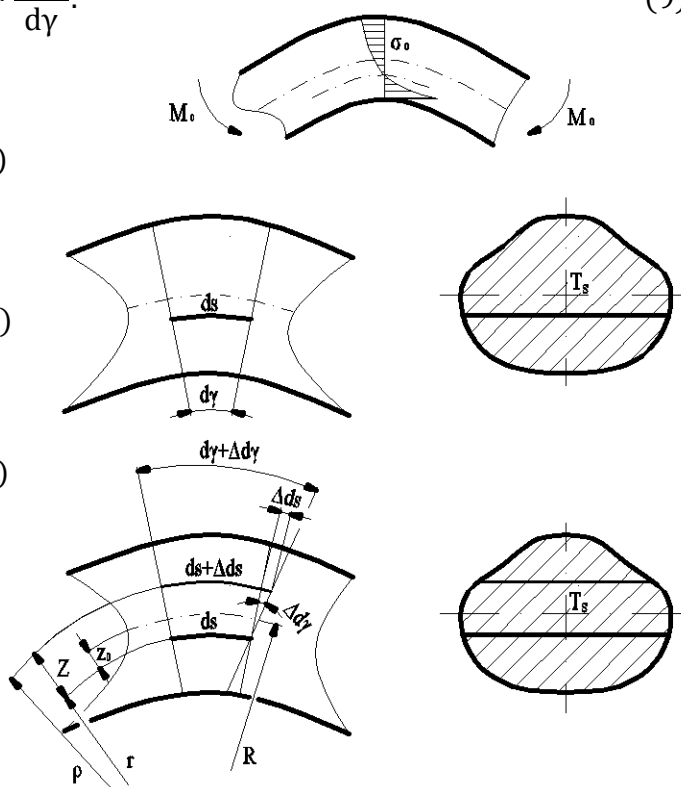
určíme člen  $(\Delta d\gamma/d\gamma)$ :

$$\frac{\Delta d\gamma}{d\gamma} = \frac{M_o}{E \cdot S \cdot z_o}. \quad (11)$$

Vztah pro tlusté křivé pruty:

$$\sigma_o(Z) = \frac{M_o}{S \cdot z_o} \cdot \frac{Z}{r + Z}. \quad (12)$$

Rovnice definuje hyperbolický průběh napětí. Největší napětí je ve vnitřním vláknu směrem ke středu křivosti.



Obr. 9 – Odvození nelineárního rozložení napětí

Protože tlusté křivé pruty jsou namáhány kombinovaně, je nutné k ohybovému napětí ještě zahrnout tahová (tlakové) napětí od normálových sil a smyková napětí od posouvajících sil.

### 2. 3. 2 Výpočet polohy neutrální osy

Abychom mohli určit ohybová napětí, je nutné nejdříve znát poloměr křivosti neutrální osy, který se neshoduje s polohou střednice průřezu, jak tomu bylo u tenkých křivých prutů. Poloha neutrální osy vyplývá z podmínky, že součet vnitřních sil kolmých k průřezu je roven nule. Z této podmínky je pak odvozen obecný vztah pro výpočet poloměru neutrální osy  $r$ :

$$r = \frac{S}{\int_{(S)} \frac{dS}{\rho}} \quad (13)$$

Pro názornost je uveden příklad výpočtu poloměru křivosti neutrální osy  $r$  pro kruhový a čtvercový průřez.

#### Kruhový průřez

Z Obr. 10 jsou patrné vztahy:

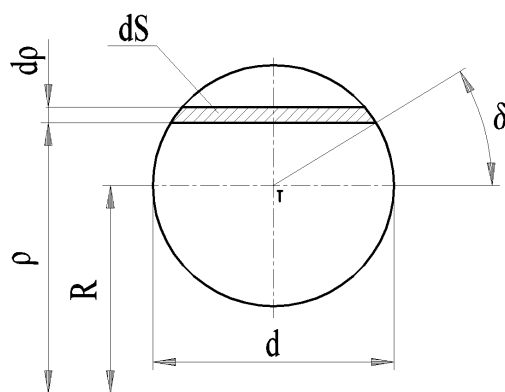
$$\rho = R + \frac{d}{2} \cdot \sin(\delta), \quad (14)$$

$$dS = d \cdot \cos(\delta) d\rho, \quad (15)$$

$$d\rho = \frac{d}{2} \cdot \cos(\delta) d\delta. \quad (16)$$

Dosazením do vztahu (13) se vypočte:

$$r = \frac{S}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d^2 \cdot \cos^2(\delta) d\delta}{2R + d \cdot \sin(\delta)}} = \frac{d^2}{4 \cdot (2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}. \quad (17)$$



Obr. 10 – Kruhový průřez

#### Čtvercový průřez

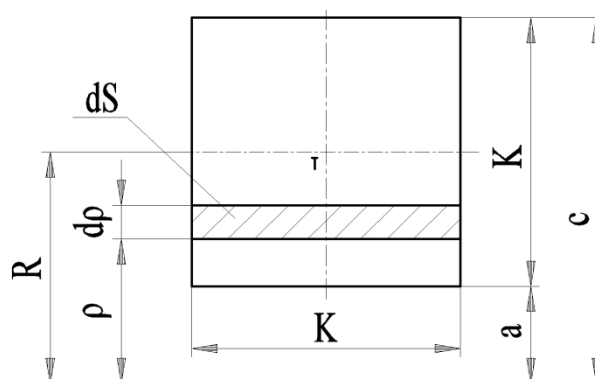
Z Obr. 11 se odvodí vztahy:

$$c = R + \frac{K}{2}, \quad (18)$$

$$a = R - \frac{K}{2}. \quad (19)$$

Poloměr neutrální osy je pak dán vztahem:

$$r = \frac{K}{\ln \frac{c}{a}}. \quad (20)$$



Obr. 11 – Čtvercový průřez

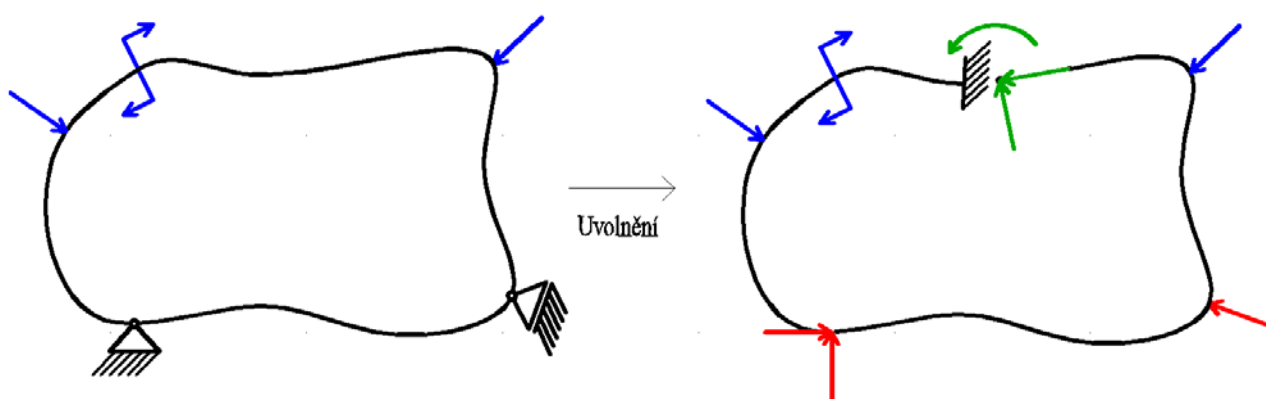


## 2. 4 UZAVŘENÉ KŘIVÉ PRUTY (RÁMY)

Je-li střednice prutu sestavena z přímých, případně zakřivených částí, které tvoří uzavřenou rovinnou křivku, jedná se o uzavřený křivý prut, někdy nazýván rám. Rovinný rám má tři vnitřní neznámé účinky ( $F_x$ ,  $F_y$ , a  $M_z$  resp.  $N$ ,  $T$  a  $M_o$ ), je tedy obecně třikrát staticky neurčitý. Prostorový rám má šest vnitřních neznámých účinků ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  a  $M_z$ ) a je obecně šestkrát staticky neurčitý.

Vnitřní statická neurčitost se odstraňuje částečným uvolněním. U uzavřeného prutu provádíme částečné uvolnění obecně tolika řezy, aby vznikl otevřený prut. Vazbová deformační podmínka pak vyjadřuje zachování spojitosti a hladkosti střednice prutu v řezech vedených mimo tuhé zlomy. Což znamená, že relativní posuvy a relativní úhly natočení uvolněných konců střednice musí být nulové. Z těchto podmínek se určí složky výsledných vnitřních účinků vložené do uvolňovacího řezu.

Volný uzavřený prut je vhodné částečně uvolnit zavedením vetknutí (viz. Obr. 12). Realizace vazbových deformačních podmínek vyjadřujících nulovost “relativních” nebo “absolutních” posuvů, resp. úhlů natočení střednice v místě uvolňovacího řezu je naprosto stejná.



**Obr. 12 – Uvolnění uzavřeného prutu**

Jednoduché namáhání se u zakřivených prutů prakticky nevyskytuje a téměř vždy se jedná o kombinované namáhání. Řešit zakřivený prut, který je namáhaný kombinovaně, jako případ jednoduchého namáhání je možné, pokud některá složka výsledných vnitřních účinků je dominantní a ostatní tedy nepodstatné.

Často se setkáváme s pruty, které jsou symetrické geometricky, materiálově nebo vazbově a jsou symetricky nebo antisymetricky zatíženy. Nutno poznamenat, že osa symetrie vzhledem k tvaru křivého prutu a jeho zatížení snižuje statickou neurčitost o jeden stupeň.

## 2. 5 DEFORMAČNÍ ENERGIE

Jedná se o vnitřní energii akumulovanou v tělese. Deformační energie je pak v řadě úloh využívána společně s předpokladem platnosti zákona zachování energie jako prostředek k řešení.

Současně platí Castiglianovy věty:

1. Parciální derivace celkové deformační energie  $U$  akumulované v libovolném tělese podle obecného silového účinku působícího v určitém bodě tohoto tělesa  $F_j$  se rovná deformaci  $\Delta_j$  v místě a směru působícího silového účinku:

$$\Delta_j = \frac{\partial U}{\partial F_j} [9]. \quad (21)$$

Pokud je nutno vypočítat deformace posunutí, je obecným silovým účinkem síla. Je-li obecným silovým účinkem moment, tak se spočítá deformace natočení.

2. Staticky neurčitá veličina  $X_i$  minimalizuje celkovou deformační energii  $U$  akumulovanou v soustavě:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \text{ (platí pro soustavy neohřáté a nepředepjaté) } [9]. \quad (22)$$

Potenciální energie deformace prvku křivého prutu potom bude:

$$U = U_{M_0} + U_N + U_{M_0N} + U_T. \quad (23)$$

$U_{M_0}$  ... je potenciální energie deformace od ohybového momentu  $M_0$

$U_N$  ... je potenciální energie deformace od normálové síly  $N$

$U_{M_0N}$  ... je potenciální energie deformace ohybového momentu, který se pootočí o úhel natočení řezu

$U_T$  ... je potenciální energie deformace od posouvající síly  $T$

Jednotlivé složky potenciální energie deformace jsou:

$$U_{M_o} = \frac{1}{2ESR_{z_o}} \int_{(s)} M_o^2 ds \dots \text{pro tlustý křivý prut,} \quad (24)$$

$$U_{M_o} = \frac{1}{2EJ} \int_{(s)} M_o^2 ds \dots \text{pro tenký křivý prut,} \quad (25)$$

$$U_N = \frac{1}{2ES} \int_{(s)} N^2 ds \dots \text{stejný tvar pro tlustý i tenký křivý prut,} \quad (26)$$

$$U_{M_o N} = \frac{1}{ESR} \int_{(s)} M_o N ds \dots \text{platí jen pro tlustý křivý prut,} \quad (27)$$

$$U_T = \frac{\beta}{2GS} \int_{(s)} T^2 ds \dots \text{stejný tvar pro tlustý i tenký křivý prut.} \quad (28)$$

$\beta$  ... součinitel nerovnoměrného rozložení smykového napětí v příčném průřezu, pro čtvercový průřez je  $\beta = 6/5$  a pro kruhový průřez je  $\beta = 32/27$

$J$  ... osový moment setrvačnosti plochy příčného řezu, pro čtvercový průřez je  $J = K^4/12$  a pro kruhový průřez je  $J = \pi d^4/64$

$S$  ... obsah plochy průřezu, pro čtvercový průřez je  $S = K^2$  a pro kruhový průřez je  $S = \pi d^2/4$

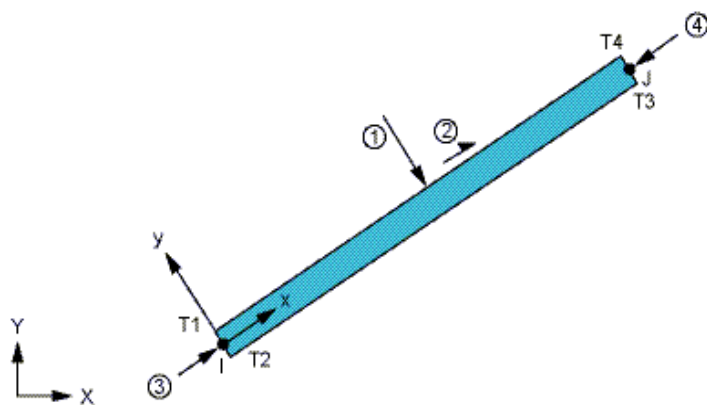
$E$  ... modul pružnosti v tahu

$G$  ... modul pružnosti ve smyku

### 3. ÚVOD K NUMERICKÉMU ŘEŠENÍ

Numerické řešení je provedeno pomocí metody konečných prvků v programu Ansys 11.0. S využitím pravidel symetrie se může u prvních dvou příkladů modelovat jen čtvrtina kroužku. Pro modelování tenkých křivých kroužků byl použit prvek Beam 3 a pro modelování tlustých křivých kroužků prvek Solid 92. Pro všechny řešené příklady byl použit materiál lineární, izotropní a elastický. Kroužky jsou z oceli s modulem pružnosti v tahu  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa, modulem pružnosti ve smyku  $G = 8 \cdot 10^4$  MPa a Poissonovým číslem  $\mu = 0,3$  [-].

#### Prvek Beam 3

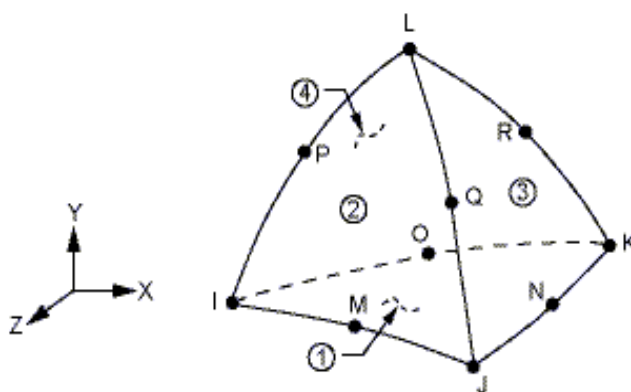


Obr. 13 – Prvek Beam 3

Jedná se o jednoosý prvek s tahovými (tlakovými) a ohybovými schopnostmi. Je tvořen dvěma uzly. V každém uzlu má tři stupně volnosti (posuvy ve směrech osy x, y a rotaci okolo osy z). Využívá se pro řešení rovinných úloh. Zakroužkované čísla na obrázku označují možné směry zatěžování elementu.

#### Prvek Solid 92

Solid 92 je čtyřboký prvek určený k řešení prostorových úloh. Je definován deseti uzly, z nichž každý má tři stupně volnosti (posuvy ve směrech osy x, y a z). Je velmi vhodný k tvorbě nepravidelné sítě. Číslicemi v kroužku jsou na obrázku označeny možné směry zatěžování elementu.



Obr. 14 – Prvek Solid 92

#### 4. KROUŽEK ZATÍŽENÝ DVĚMA SILAMI

Je uvažován kroužek, na nějž působí pouze ve vodorovném směru dvě síly stejné velikosti a vzájemně opačného smyslu (viz. Obr. 15). Rozměry kroužku jsou záměrně voleny tak, ať je poměr poloměru zakřivení střednice vzhledem k výšce profilu v rovině střednice roven pěti. Výpočet se provede analyticky podle teorie tenkých i tlustých křivých prutů a poté i numericky. Výsledné hodnoty se navzájem porovnají.

Výpočet je proveden pro následující hodnoty:

$$R = 100 \text{ mm}$$

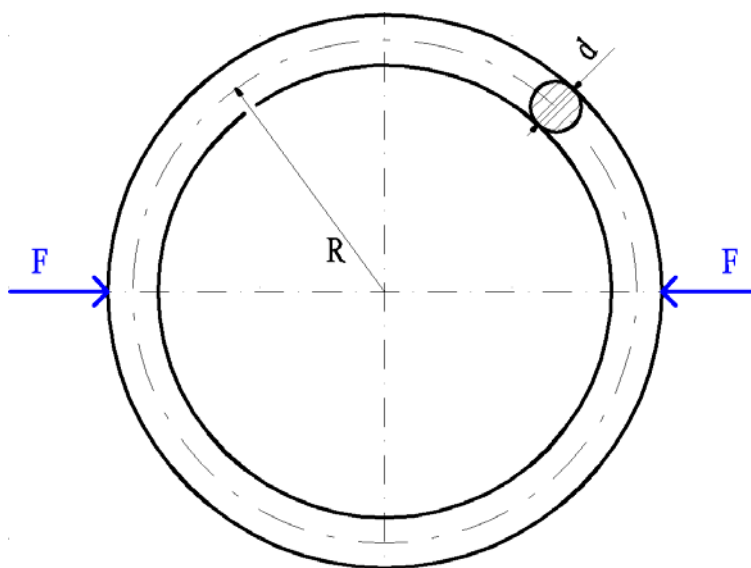
$$d = 20 \text{ mm}$$

$$F = 3000 \text{ N}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0,3 \text{ [-]}$$



**Obr. 15 – Kroužek zatížený dvěma silami**

Ověření, zda je poměr  $R/h = 5$  dle zadání:

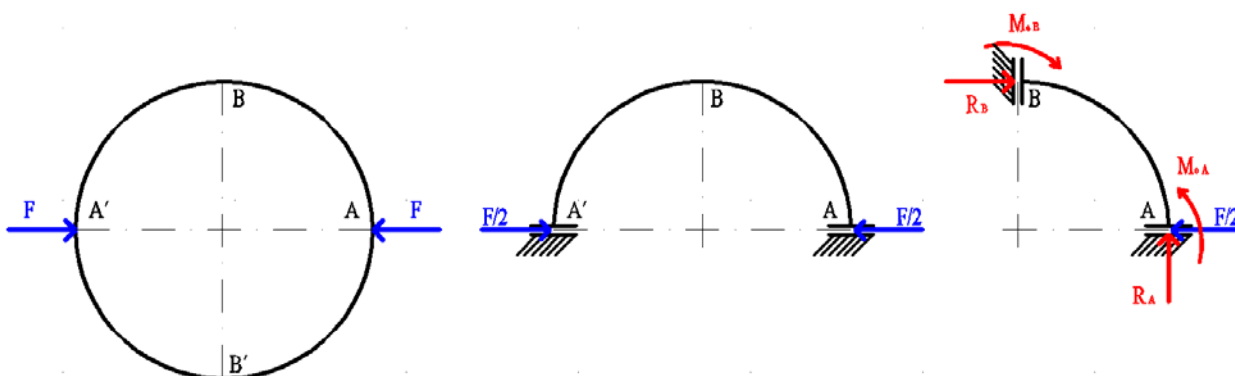
$$\frac{R}{h} = \frac{R}{d} = \frac{100}{20} = 5 \dots \text{ splněno.} \quad (29)$$

Tento poměr totiž tvoří pomyslnou hranici, podle níž se výpočet rozděluje podle teorie tenkých nebo tlustých křivých prutů.

## 4.1 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

### 4.1.1 SLABĚ ZAKŘIVENÝ KROUŽEK

Kroužek se považuje za slabě zakřivený prut, který má uzavřenou střednici a dvě osy symetrie. Obecně je tedy úloha třikrát staticky neurčitá, ale při využití dvojnásobné symetrie bude staticky neurčitou veličinou pouze jedna souřadnice vnitřních výsledných účinků (viz. Obr. 16).



Obr. 16 – Uvolnění kroužku s využitím pravidel symetrie

Z podmínek rovnováhy je patrné:

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{0} \text{ N.} \quad (30)$$

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{F}/2 = 1500 \text{ N.} \quad (31)$$

$\mathbf{M}_{0A}, \mathbf{M}_{0B} \dots$  neznámé ohybové momenty, určí se z deformační podmínky

Vzhledem k souměrnosti stačí tedy vyšetřit pouze jeden kvadrant kroužku. Velikosti ohybových momentů  $M_{0A}, M_{0B}$  jsou veličiny staticky neurčité. Pro jejich výpočet se využije Castiglianovy věty. Z podmínky plynoucí ze souměrnosti je zřejmé, že se průřez kroužku například v místě A při ohybu nepootočí. Proto deformační podmínka má tvar

$$\Delta\varphi_A = \frac{\partial U}{\partial M_{0A}} = 0. \quad (32)$$

Kde písmenem  $U$  je vyjádřena deformační energie, která pro tenký křivý prut má tvar:

$$U = U_N + U_T + U_{M_0}. \quad (33)$$

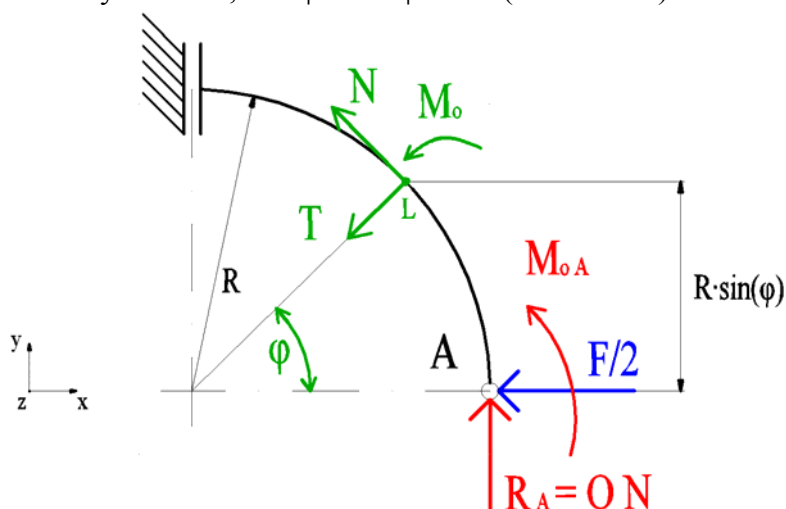
Dosazení do vztahu (33):

$$U = \frac{1}{2ES} \int_{(s)} N^2 ds + \frac{\kappa}{2GS} \int_{(s)} T^2 ds + \frac{1}{2EJ} \int_{(s)} M_0^2 ds. \quad (34)$$

Ze vztahu (34) je odvozen tvar deformační podmínky:

$$\Delta\varphi_A = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_{(s)} M_o \cdot \frac{\partial M_o}{\partial M_{oA}} \cdot ds = 0. \quad (35)$$

S využitím deformační podmínky (35) a statických podmínek rovnováhy lze určit průběhy výsledných vnitřních účinků. Hodnoty výsledných vnitřních účinků se propočítají v krajních místech čtvrtiny kroužku, kde  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi/2$  (viz. Obr 17).



**Obr. 17 – Zavedení pomyslného řezu pod úhlem  $\varphi$  do čtvrtiny kroužku**

#### Výpočet normálových sil $N_{(\varphi)}$

Pro  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi/2$ .

$$\Sigma F_N = 0 \rightarrow N_{(\varphi)} = -\frac{F}{2} \cdot \sin(\varphi) \quad (36)$$

Dosazením do vztahu (36) se vypočítají hodnoty normálových sil:

$$N_{(0)} = -\frac{3000}{2} \cdot \sin(0^\circ) = 0 \text{ N}, \quad (37)$$

$$N_{(\pi/2)} = -\frac{3000}{2} \cdot \sin(90^\circ) = -1500 \text{ N}. \quad (38)$$

#### Výpočet posouvajících sil $T_{(\varphi)}$

Pro  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi/2$ .

$$\Sigma F_T = 0 \rightarrow T_{(\varphi)} = -\frac{F}{2} \cdot \cos(\varphi) \quad (39)$$

Dosazením do vztahu (39) se vypočítají hodnoty posouvajících sil:

$$T_{(0)} = -\frac{3000}{2} \cdot \cos(0^\circ) = -1500 \text{ N}, \quad (40)$$

$$T_{(\pi/2)} = -\frac{3000}{2} \cdot \cos(90^\circ) = 0 \text{ N}. \quad (41)$$

### Výpočet ohybových momentů $M_{o(\varphi)}$

$$\Sigma M_L = 0 \rightarrow M_{o(\varphi)} = -M_{oA} + \frac{F}{2} \cdot R \cdot \sin(\varphi) \quad (42)$$

Pro zjištění potřebné hodnoty momentu  $M_{oA}$  se vychází z již zmiňované deformační podmínky (35), kde  $ds = R d\varphi$ :

$$\Delta\varphi_A = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_0^{\pi/2} M_{o(\varphi)} \cdot \frac{\partial M_{o(\varphi)}}{\partial M_{oA}} \cdot R d\varphi = 0. \quad (43)$$

Nejprve se provede parciální derivace:

$$\frac{\partial M_{o(\varphi)}}{\partial M_{oA}} = -1. \quad (44)$$

Po doplnění a následné integraci se vypočítá velikost momentu  $M_{oA}$

$$\Delta\varphi_A = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[ -M_{oA} + \frac{F}{2} \cdot R \cdot \sin(\varphi) \right] \cdot R d\varphi = 0 \quad (45)$$

$$M_{oA} = \frac{R \cdot F}{\pi} \quad (46)$$

Dosazením momentu  $M_{oA}$  do vztahu (42) získáme vztah pro určení průběhu ohybových momentů  $M_{o(\varphi)}$  pro slabě zakřivený kroužek:

$$M_{o(\varphi)} = -\frac{R \cdot F}{\pi} + \frac{F}{2} \cdot R \cdot \sin(\varphi). \quad (47)$$

Dosazením se zjistí velikosti ohybových momentů pro úhly  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi/2$ :

$$M_{o(0)} = -\frac{100 \cdot 3000}{\pi} + \frac{3000}{2} \cdot 100 \cdot \sin(0^\circ) = -95492,97 \text{ N} \cdot \text{mm}, \quad (48)$$

$$M_{o(\pi/2)} = -\frac{100 \cdot 3000}{\pi} + \frac{3000}{2} \cdot 100 \cdot \sin(90^\circ) = 54507,03 \text{ N} \cdot \text{mm}. \quad (49)$$

Vykreslení výsledných vnitřních účinků je obdobné jako u řešení metodou konečných prvků a bude vykresleno programem ANSYS 11.0 v numerickém řešení (viz. str. 30).

### Výpočet maximálního napětí $\sigma_{\max}$

Maximální napětí vzniká v místě A ( $\varphi = 0^\circ$ )(viz. Obr. 17, str. 23), kde je ohybový moment maximální. Pro výpočet je uvažováno pouze napětí od ohybového momentu, jelikož napětí od normálové síly je zde nulové a smykové napětí  $\tau$  je zanedbatelné.

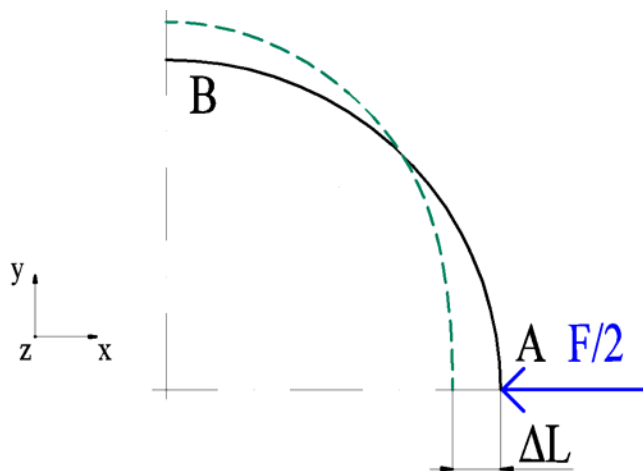
$$\sigma_{\max} = \sigma_o = \pm \frac{M_{o\max}}{W_o} = \pm \frac{32 \cdot M_{o\max}}{\pi \cdot d^3} = \pm \frac{32 \cdot (-95492,97)}{\pi \cdot 20^3} = \pm 121,59 \text{ MPa} \quad (50)$$

Pro porovnání výsledků se velikost maximálního napětí  $\sigma_{\max}$  uvede v absolutní hodnotě.



### Výpočet maximálního posunutí $\Delta L$

Maximální posunutí se předpokládá v záporném směru osy x od místa A, kde působí síla  $F/2$  (viz. Obr. 18)



**Obr. 18 – Zobrazení maximálního posunutí**

Pro výpočet se vychází z podmínky:

$$\Delta L = \frac{\partial U}{\partial F/2}, \quad (51)$$

kde  $U$  je dáno vztahem (34).

Dosazením do podmínky (51) se získá vztah pro kroužek, řešený jako tenký křivý prut:

$$\Delta L = \frac{1}{E \cdot S} \cdot \int_{(s)} N \cdot \frac{\partial N}{\partial F/2} ds + \frac{\beta}{G \cdot S} \cdot \int_{(s)} T \cdot \frac{\partial T}{\partial F/2} ds + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_{(s)} M_o \cdot \frac{\partial M_o}{\partial F/2} ds. \quad (52)$$

Tento tvar se zjednodušeně zapíše jako:

$$\Delta L = \Delta L_N + \Delta L_T + \Delta L_{M_o}. \quad (53)$$

Provedením příčinných partiálních derivací a následných integrací vztahu (52) se získají následující členy pro výpočet maximálního posunutí:

$$\Delta L_N = \frac{\pi \cdot F \cdot R}{8 \cdot E \cdot S} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3000 \cdot 100}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 20^2} = 1,79 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad (54)$$

$$\Delta L_T = \frac{\beta \cdot \pi \cdot F \cdot R}{8 \cdot G \cdot S} = \frac{4 \cdot 32/27 \cdot \pi \cdot 3000 \cdot 100}{8 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 20^2} = 5,56 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad (55)$$

$$\Delta L_{M_o} = \frac{(\pi^2 - 8) \cdot F \cdot R^3}{8 \cdot \pi \cdot E \cdot J} = \frac{64 \cdot (\pi^2 - 8) \cdot 3000 \cdot 100^3}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \pi^2 \cdot 20^4} = 135,31 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \quad (56)$$

Sečtením výsledných hodnot ze vztahů (54), (55), (56) byla získána hodnota maximálního posunutí v záporném smyslu osy x:

$$\Delta L = 1,79 \cdot 10^{-3} + 5,56 \cdot 10^{-3} + 135,31 \cdot 10^{-3} = 142,66 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \quad (57)$$

#### 4. 1. 2 SILNĚ ZAKŘIVENÝ KROUŽEK

**Výpočet poloměru křivosti neutrální osy r:**

$$r = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot \pi(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4 \cdot \pi(2 \cdot 100 - \sqrt{4 \cdot 100^2 - 20^2})} = 99,749 \text{ mm.} \quad (58)$$

**Výpočet posunutí vzhledem ke střednici z<sub>o</sub>:**

$$z_o = R - r = 100 - 99,75 = 0,251 \text{ mm.} \quad (59)$$

Výpočet velikostí normálových sil  $N_{(\varphi)}$  a posouvajících sil  $T_{(\varphi)}$  je stejný jako pro slabě zakřivený kroužek. Zvýšená pozornost byla věnována výpočtu ohybových momentů  $M_{o(\varphi)}$ . Pro výpočet se opět vychází z deformační podmínky (32).

Deformační energie pro kroužek, řešený jako tlustý křivý prut:

$$U = U_N + U_T + U_{M_o} + U_{M_o N}. \quad (60)$$

Dosazením získáme vztah pro silně zakřivený kroužek:

$$U = \frac{1}{2ES} \int_{(s)} N^2 ds + \frac{\beta}{2GS} \int_{(s)} T^2 ds + \frac{1}{2ESRz_o} \int_{(s)} M_o^2 ds + \frac{1}{ESR} \int_{(s)} M_o N ds. \quad (61)$$

Deformační podmínka pro silně zakřivený kroužek je:

$$\Delta\varphi_A = \frac{1}{ESRz_o} \cdot \int_{(s)} M_o \cdot \frac{\partial M_o}{\partial M_{oA}} \cdot ds + \frac{1}{ESR} \int_{(s)} \left( M_o \cdot \frac{\partial N}{\partial M_{oA}} + N \cdot \frac{\partial M_o}{\partial M_{oA}} \right) ds = 0. \quad (62)$$

**Výpočet ohybových momentů  $M_{o(\varphi)}$**

Vychází se ze vztahu (42) odvozeného pro slabě zakřivený kroužek, kde hodnota momentu  $M_{oA}$  se vypočítá z deformační podmínky (62), kde  $ds = Rd\varphi$ :

$$\Delta\varphi_A = \frac{1}{ESRz_o} \int_0^{\pi/2} M_o \frac{\partial M_o}{\partial M_{oA}} Rd\varphi + \frac{1}{ESR} \int_0^{\pi/2} \left( M_o \frac{\partial N}{\partial M_{oA}} + N \frac{\partial M_o}{\partial M_{oA}} \right) Rd\varphi = 0. \quad (63)$$

Po doplnění a provedení patřičných partiálních derivací získáme výraz:

$$\Delta\varphi_A = \frac{1}{ESRz_o} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[ -M_{oA} + \frac{F}{2} \cdot R \cdot \sin(\varphi) \right] \cdot Rd\varphi + \frac{1}{ESR} \int_0^{\pi/2} \left[ -\frac{F}{2} \cdot \sin(\varphi) \right] Rd\varphi = 0. \quad (64)$$

Po integrování byl odvozen vztah pro moment  $M_{oA}$ :

$$M_{oA} = \frac{F \cdot (R - z_0)}{\pi}. \quad (65)$$

Výsledný vztah pro určení průběhu ohybových momentů  $M_{o(\varphi)}$  pro silně zakřivený kroužek:

$$M_{o(\varphi)} = -\frac{F \cdot (R - z_0)}{\pi} + \frac{F}{2} \cdot R \cdot \sin(\varphi). \quad (66)$$

Ze vztahu (66) se vypočítají velikosti ohybových momentů pro  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi/2$ :

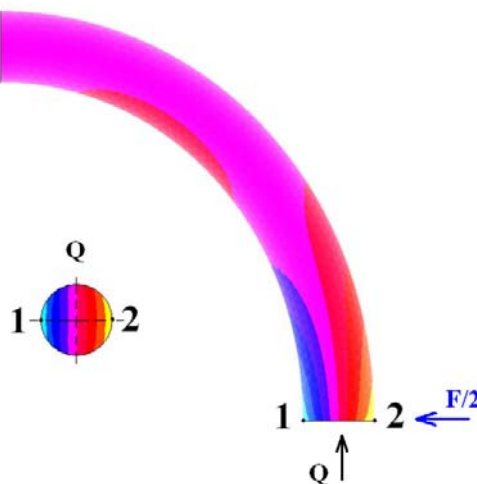
$$M_{o(0)} = -\frac{3000 \cdot (100 - 0,251)}{\pi} + \frac{3000}{2} \cdot 100 \cdot \sin(0^\circ) = -95253,28 \text{ N} \cdot \text{mm}, \quad (67)$$

$$M_{o(\pi/2)} = -\frac{3000 \cdot (100 - 0,251)}{\pi} + \frac{3000}{2} \cdot 100 \cdot \sin(90^\circ) = 54746,72 \text{ N} \cdot \text{mm}. \quad (68)$$

Vykreslení vnitřních výsledných účinků má tedy obdobný průběh jako u slabě zakřiveného kroužku a bude vykresleno v numerické části řešení kroužku řešeného jako tenký křivý prut (viz. str. 30).

### Výpočet redukovaného napětí $\sigma_{red}$ :

Ohybové napětí je počítáno v místě 1 (kde jsou vlákna tažena) a v místě 2 (kde jsou vlákna stlačována) dle Obr. 19. Pro výpočet redukovaného napětí dle HMM hypotézy se vybere větší z těchto napětí.



Obr. 19 – Zobrazení tažených (stlačovaných) míst

Výpočet ohybového napětí  $\sigma_o$

$$\sigma_{o1} = -\frac{M_{o\max}}{S \cdot z_0} \cdot \frac{\frac{d}{2} - z_0}{R - \frac{d}{2}} = -\frac{4 \cdot (-95253,28)}{\pi \cdot d^2 \cdot 0,251} \cdot \frac{\frac{20}{2} - 0,251}{100 - \frac{20}{2}} = 130,85 \text{ MPa} \quad (69)$$

$$\sigma_{o2} = \frac{M_{o\max}}{S \cdot z_0} \cdot \frac{\frac{d}{2} + z_0}{R + \frac{d}{2}} = \frac{4 \cdot (-95253,28)}{\pi \cdot d^2 \cdot 0,251} \cdot \frac{\frac{20}{2} + 0,251}{100 + \frac{20}{2}} = -112,57 \text{ MPa} \quad (70)$$

Jelikož napětí od normálové síly  $N$  je nulové a smykové napětí  $\tau$  je zanedbatelné. Výsledné maximální redukované napětí se vypočte pouze z ohybového napětí  $\sigma_o$ .

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_{o2}^2} = \sqrt{(130,85)^2} = 130,85 \text{ MPa.} \quad (71)$$

### Výpočet maximálního posunutí $\Delta L$

Maximální posunutí se předpokládá v záporném směru osy  $x$  od místa  $A$ , kde působí síla  $F/2$  (viz. Obr. 18, str. 25). Pro výpočet se vychází z podmínky (51), kde dosazením se získá vztah pro silně zakřivený kroužek:

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{1}{ES} \int_{(s)} N \frac{\partial N}{\partial F/2} ds + \frac{\beta}{GS} \int_{(s)} T \cdot \frac{\partial T}{\partial F/2} ds + \frac{1}{ESRz_o} \int_{(s)} M_o \frac{\partial M_o}{\partial F/2} ds \\ & + \frac{1}{ESR} \int_{(s)} \left( M_o \frac{\partial N}{\partial F/2} + N \frac{\partial M_o}{\partial F/2} \right) ds. \end{aligned} \quad (72)$$

Tento tvar se zjednodušeně napíše jako:

$$\Delta L = \Delta L_N + \Delta L_T + \Delta L_{M_o} + \Delta L_{M_o N}. \quad (73)$$

První dva členy  $\Delta L_N$  a  $\Delta L_T$  mají stejnou hodnotu jako u slabě zakřiveného kroužku, a proto se k vypočtení maximálního posunutí použijí vztahy (54) a (55), kde  $\Delta L_N$  je  $1,79 \cdot 10^{-3}$  mm a  $\Delta L_T$  je  $5,56 \cdot 10^{-3}$  mm. Provedením patřičných parciálních derivací a následných integrací se získají za vztahu (72) následující členy pro výpočet maximálního posunutí  $\Delta L$ :

$$\begin{aligned} \Delta L_{M_o} = & \frac{F \cdot (32 \cdot \pi^2 \cdot R^4 - 256 \cdot R^4 + d^4)}{256 \cdot \pi \cdot E \cdot S \cdot R^2 \cdot z_o} = \frac{4 \cdot 3000 \cdot (32 \cdot \pi^2 \cdot 100^4 - 256 \cdot 100^4 + 20^4)}{256 \cdot \pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 100^2 \cdot 0,251 \cdot 20^2} \\ = & 134,77 \cdot 10^{-3} \text{ mm,} \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \Delta L_{M_o N} = & - \frac{F \cdot (2 \cdot \pi^2 \cdot R^2 - 16 \cdot R^2 + d^2)}{8 \cdot \pi \cdot E \cdot S \cdot R} = \frac{4 \cdot 3000 \cdot (2 \cdot \pi^2 \cdot 100^2 - 16 \cdot 100^2 + 20^2)}{8 \cdot \pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 20^2} \\ = & -0,68 \cdot 10^{-3} \text{ mm.} \end{aligned} \quad (75)$$

Sečtením výsledných hodnot ze vztahů (54), (55), (76) a (77) byla získána hodnota maximálního posunutí v záporném smyslu osy  $x$ :

$$\Delta L = 1,79 \cdot 10^{-3} + 5,56 \cdot 10^{-3} + 134,77 \cdot 10^{-3} - 0,68 \cdot 10^{-3} = 141,44 \cdot 10^{-3} \text{ mm.} \quad (76)$$

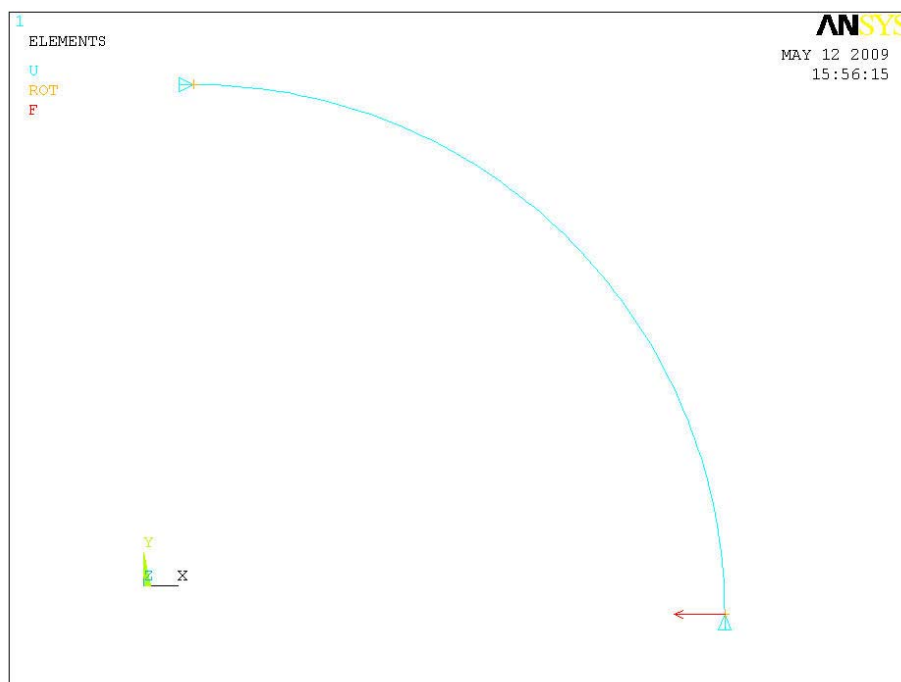
## 4.2 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

### 4.2.1 SLABĚ ZAKŘIVENÝ KROUŽEK

S využitím pravidel symetrie byla v programu ANSYS 11.0 vymodelována pouze čtvrtina kroužku. Pro řešení kroužku, jako tenkého křivého prutu zatíženého dvěma silami bylo vytvořeno makro (viz. 9.1 Makro – kroužek zatížený dvěma silami).

#### Zatížení a uložení kroužku

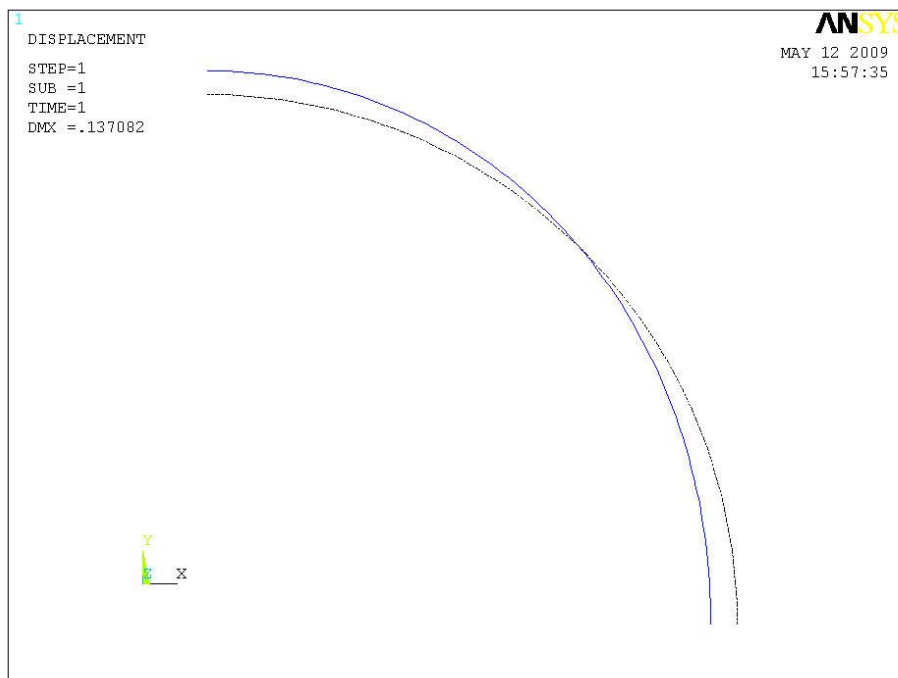
Uložení a zatížení čtvrtiny kroužku je realizováno stejně jako u analytického řešení. Zatěžující síla je na Obr. 20 znázorněna červenou šipkou, odebrané posuvy ve směru osy x a y jsou znázorněny modrými trojúhelníčky a odebraná rotace kolem osy z žlutým křížkem.



Obr. 20 – Zatížení a uložení čtvrtiny kroužku v programu ANSYS 11.0

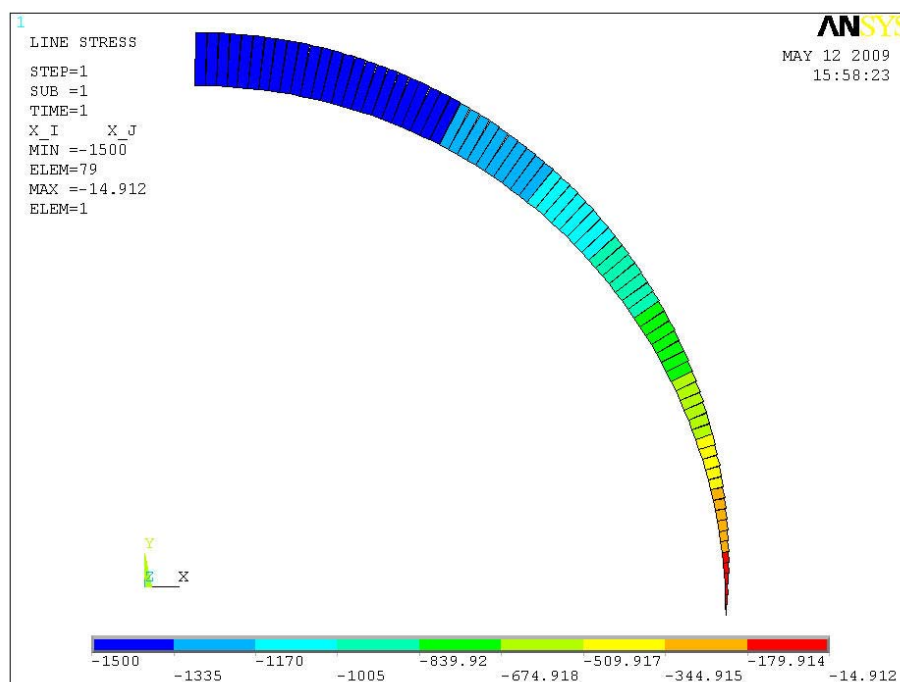
## Deformovaný tvar

Na Obr. 21 je modře znázorněn zdeformovaný tvar a černě původní tvar kroužku.

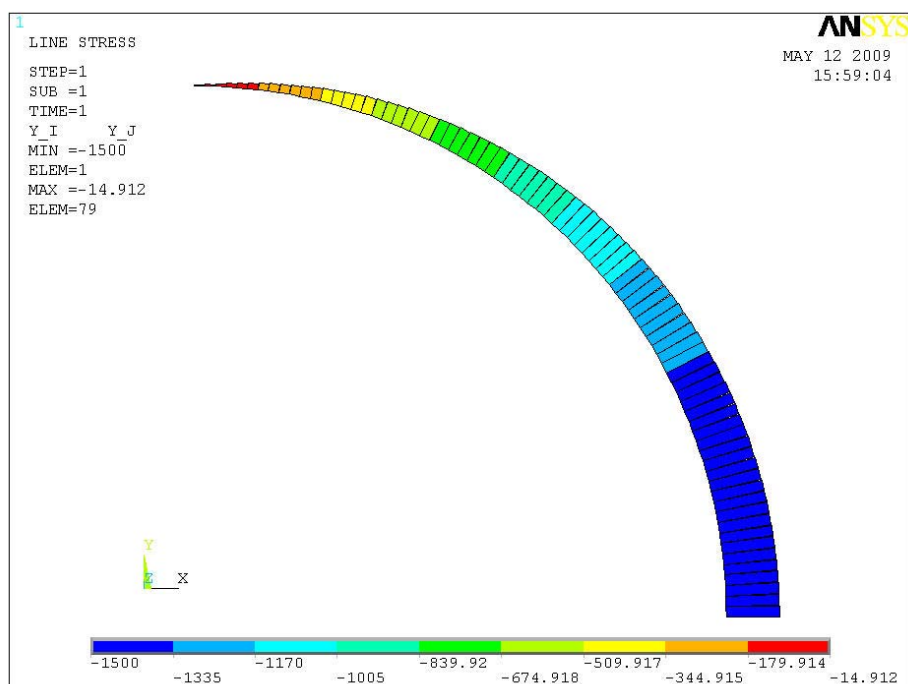


Obr. 21 – Zdeformovaný tvar

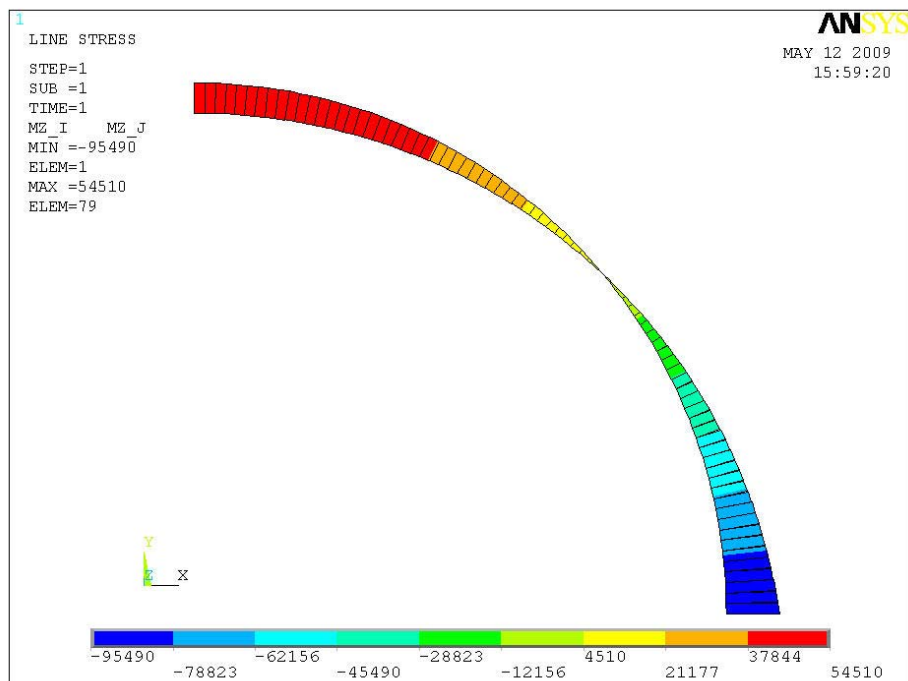
## Vykreslení výsledných vnitřních účinků



Obr. 22 – Průběh normálových sil N [N]



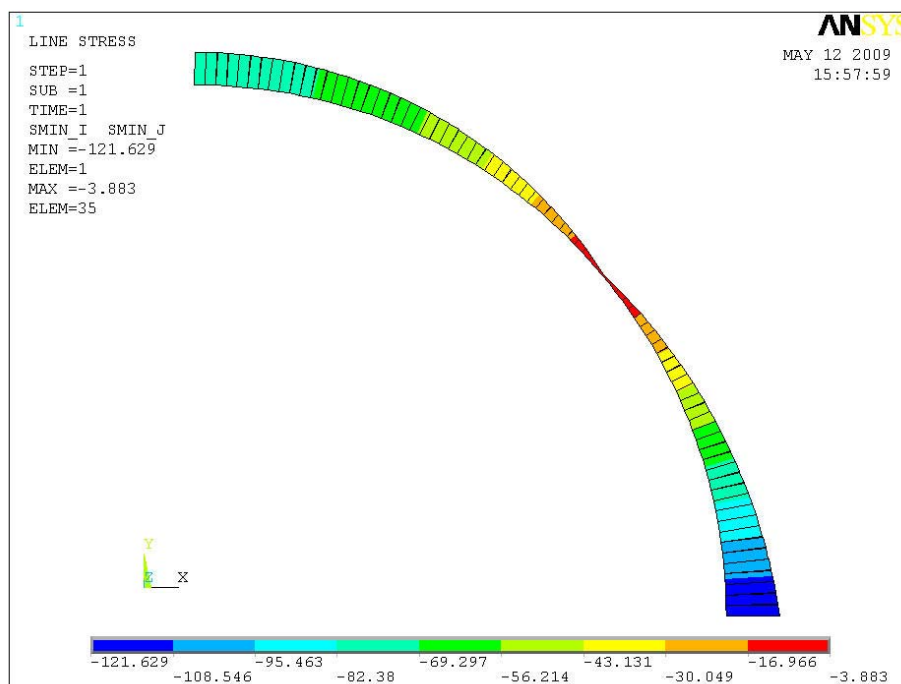
Obr. 23 – Průběh posouvajících sil  $T$  [N]



Obr. 24 – Průběh ohybových momentů  $M_0$  [N·mm]

## Určení výsledného maximálního napětí $\sigma_{\max}$

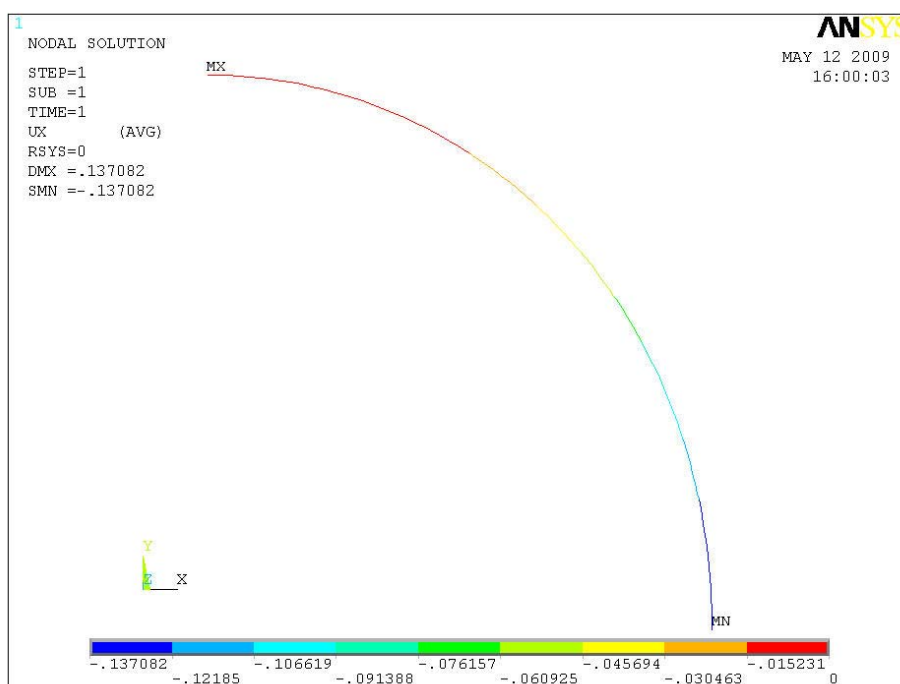
Pro porovnání výsledků se velikost maximálního napětí  $\sigma_{\max}$  uvede v absolutní hodnotě.



Obr. 25 – Průběh výsledných napětí [MPa]

## Určení maximálního posunutí $\Delta L$

Program ANSYS 11.0 vykreslil toto posunutí záporné podle orientace směru osy x. Pro porovnání výsledků se toto posunutí dosadí v absolutní hodnotě.



Obr. 26 – Zobrazení maximálního posunutí [mm]

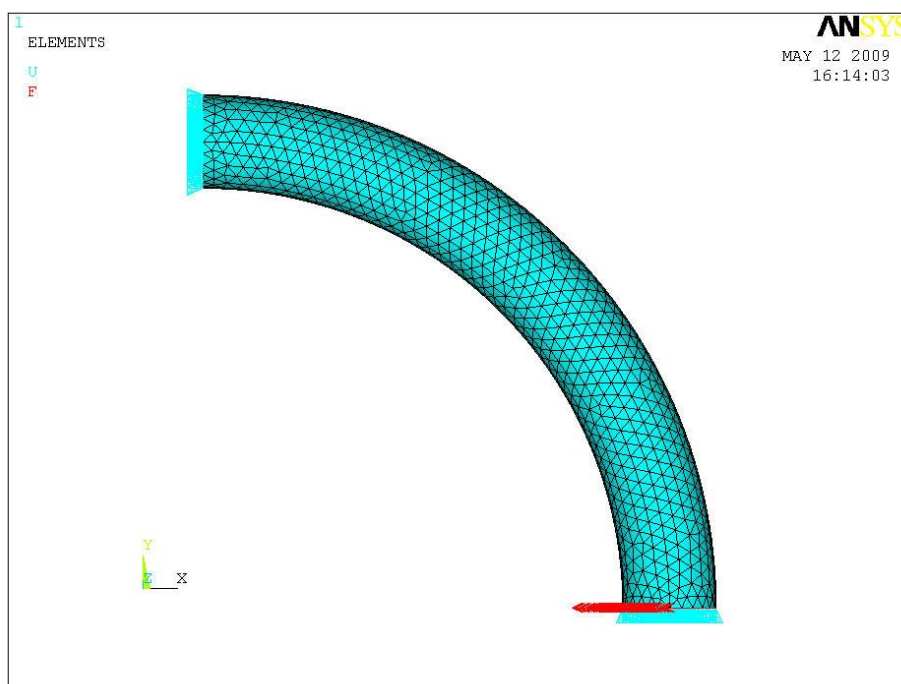


#### 4. 2. 2 SILNĚ ZAKŘIVENÝ KROUŽEK

S využitím pravidel symetrie byla v programu ANSYS 11.0 vymodelována pouze čtvrtina kroužku. Pro řešení kroužku, jako silně zakřiveného prutu zatíženého dvěma silami bylo vytvořeno makro (viz. 9.1 Makro – kroužek zatížený dvěma silami).

##### **Zatížení a uložení kroužku**

Zatěžující síla je znázorněna červenou barvou a je aplikována na ploše dle Obr. 27. Její hodnota je podělena počtem uzlů, které se na této ploše vyskytují. Odebrané posuvy ploch ve směru osy x a taky ve směru osy y jsou znázorněny modrými trojúhelníčky.

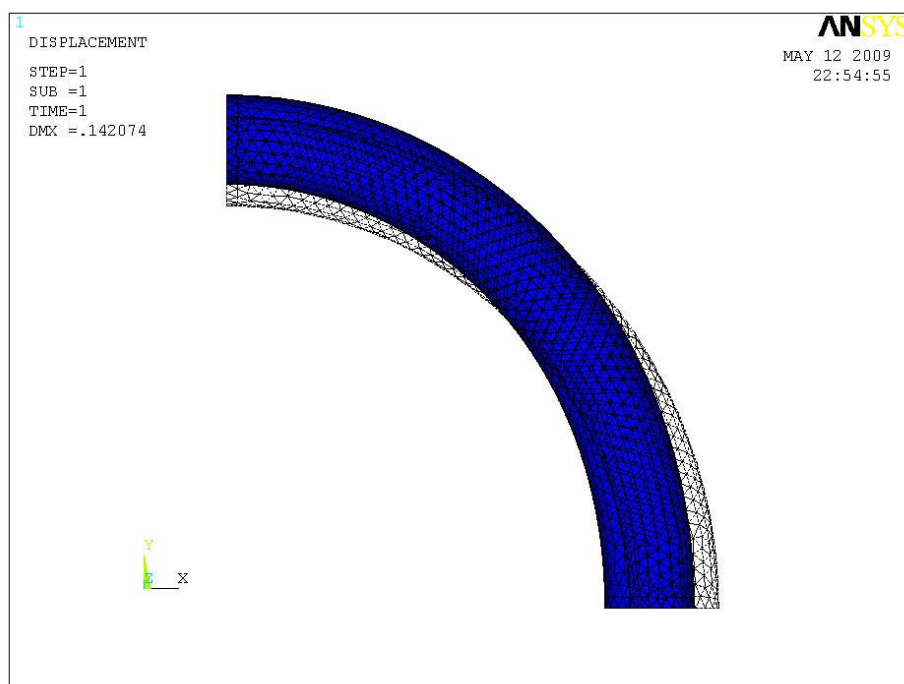


**Obr. 27 – Zatížení a uložení čtvrtiny kroužku v programu ANSYS 11.0**

Vykreslení výsledných vnitřních účinků je obdobné jako pro kroužek, řešený podle teorie tenkých křivých prutů (viz. str. 30), a proto není nutné jej znovu vykreslovat.

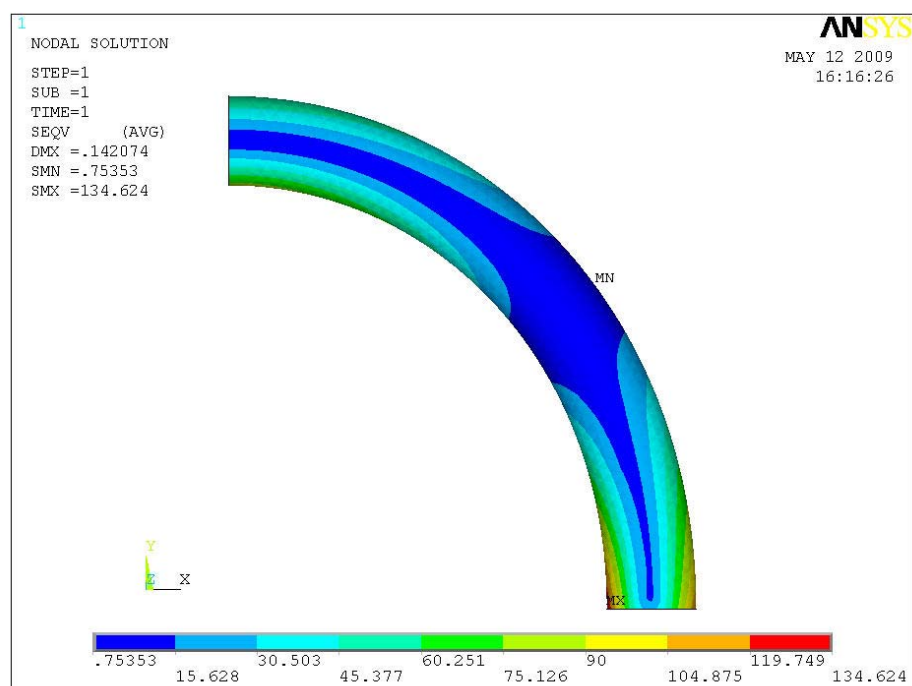
## Deformovaný tvar

Modrou barvou je znázorněn zdeformovaný tvar a černě původní tvar kroužku

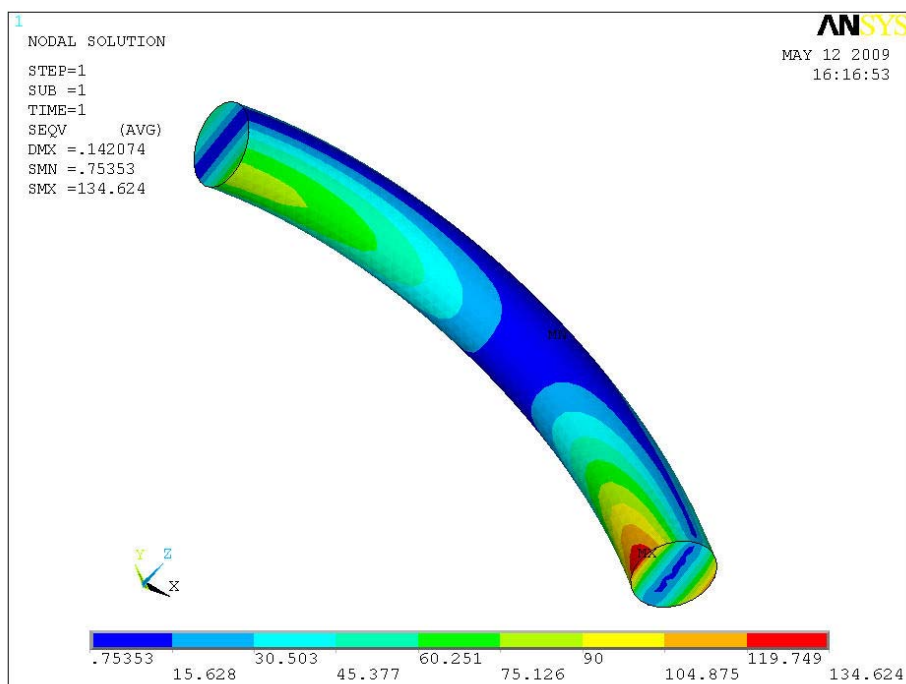


Obr. 28 – Zdeformovaný tvar

## Určení redukovaného napětí $\sigma_{red}$ dle hypotézy HMH



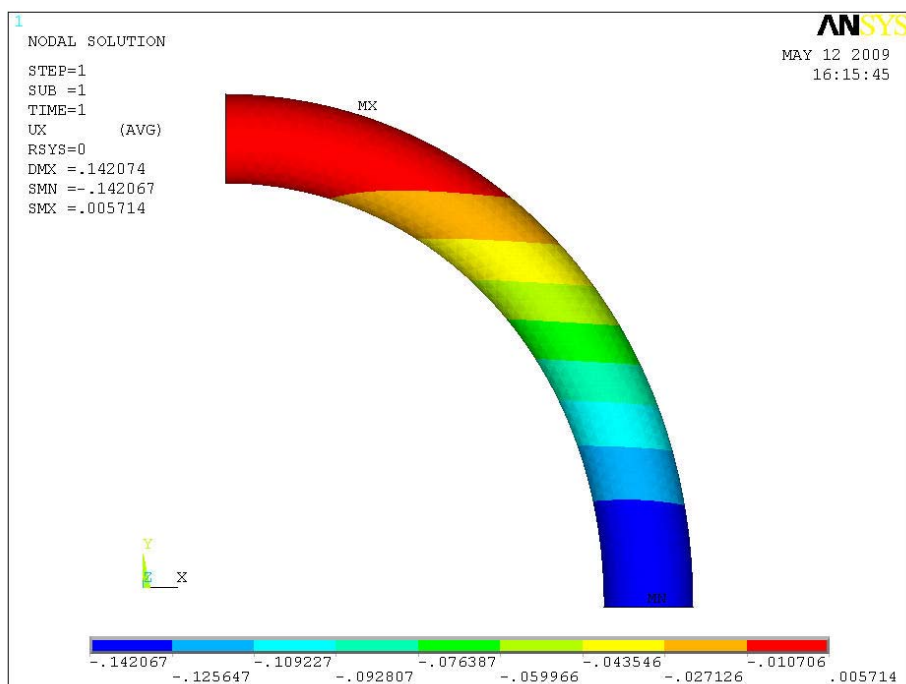
Obr. 29a – Rozložení napětí dle HMH hypotézy [MPa]



**Obr. 29b – Rozložení napětí dle HMH hypotézy [MPa] (pootočený pohled)**

### Určení maximálního posunutí $\Delta L$

Program ANSYS 11.0 vykreslil toto posunutí záporné podle orientace směru osy x. Pro porovnání výsledků se toto posunutí dosadí v absolutní hodnotě.



**Obr. 30 – Zobrazení maximálního posunutí [mm]**

#### 4.3 POROVNÁNÍ DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ ZATÍŽENÍ KROUŽKU DVĚMA SILAMI

Porovnávaná veličina	ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ		Chyba [%]
	Teorie tenkých křivých prutů	Teorie tlustých křivých prutů	
<b>Napětí [MPa]</b>	$\pm 121,59$	130,85	7,08
<b>Posunutí [mm]</b>	$142,66 \cdot 10^{-3}$	$141,44 \cdot 10^{-3}$	0,86

**Tab. 1 – Analytické porovnání výsledků podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů**

Porovnávaná veličina	NUMERICKÉ ŘEŠENÍ		Chyba [%]
	Teorie tenkých křivých prutů	Teorie tlustých křivých prutů	
<b>Napětí [MPa]</b>	$-121,63$	134,62	9,65
<b>Posunutí [mm]</b>	$-137,08 \cdot 10^{-3}$	$-142,07 \cdot 10^{-3}$	3,51

**Tab. 2 – Numerické porovnání výsledků podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů**

Porovnávaná veličina	KROUŽEK ŘEŠENÝ JAKO TENKÝ KŘIVÝ PRUT		Chyba [%]
	Analytické řešení	Numerické řešení	
<b>Napětí [MPa]</b>	$\pm 121,59$	$-121,63$	0,03
<b>Posunutí [mm]</b>	$142,66 \cdot 10^{-3}$	$-137,08 \cdot 10^{-3}$	3,91

**Tab. 3 – Porovnání výsledků pro kroužek řešený jako tenký křivý prut**

Porovnávaná veličina	KROUŽEK ŘEŠENÝ JAKO TLUSTÝ KŘIVÝ PRUT		Chyba [%]
	Analytické řešení	Numerické řešení	
<b>Napětí [MPa]</b>	130,85	134,62	2,80
<b>Posunutí [mm]</b>	$141,44 \cdot 10^{-3}$	$-142,07 \cdot 10^{-3}$	0,44

**Tab. 4 – Porovnání výsledků pro kroužek řešený jako tlustý křivý prut**

## 5. KROUŽEK ZATÍŽENÝ ČTYŘMI SILAMI

Je uvažován rozměrově stejný kroužek jako v předchozím příkladu (viz. 4. Kroužek zatížený dvěma silami), na nějž působí ve vodorovném, ale i ve svislém směru dvě síly stejné velikosti a vzájemně opačného smyslu (viz. Obr. 31). Výpočet se provede podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů analyticky i numericky a výsledné hodnoty se navzájem porovnají.

Výpočet je proveden pro následující hodnoty:

$$R = 100 \text{ mm}$$

$$d = 20 \text{ mm}$$

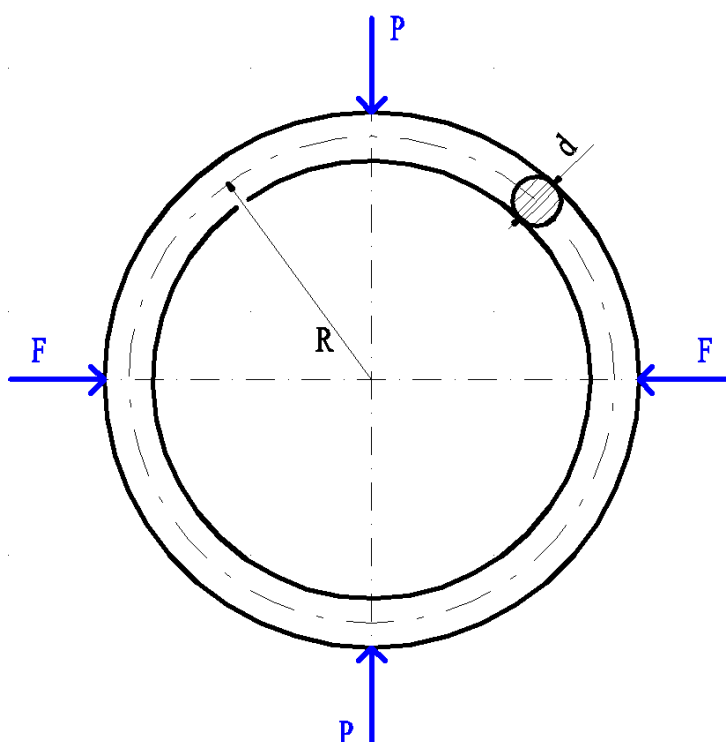
$$F = 3000 \text{ N}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0,3 \text{ [-]}$$



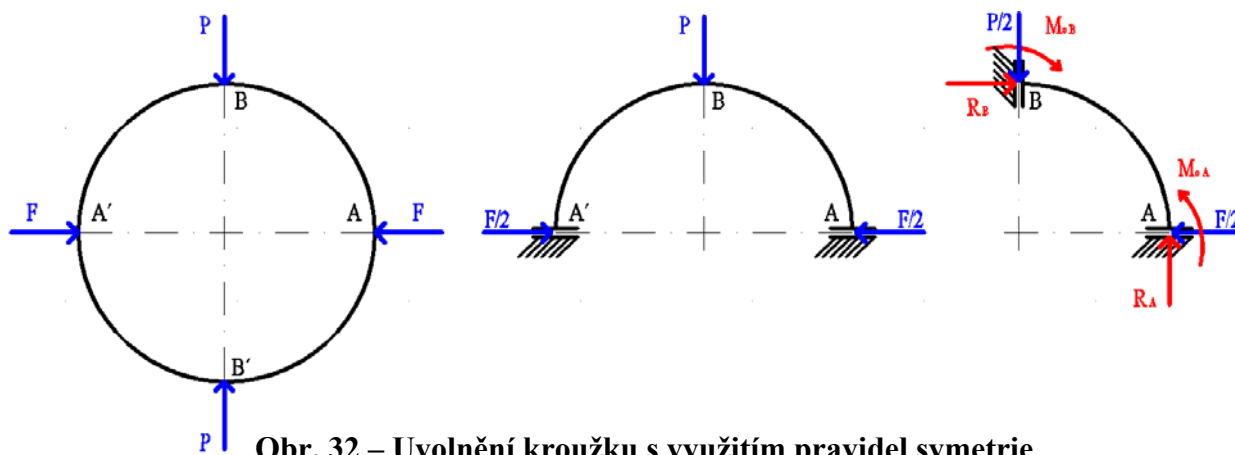
Obr. 31 – Kroužek zatížený čtyřmi silami

Ověření, zda je poměr  $R/h = 5$  dle zadání:

$$\frac{R}{h} = \frac{R}{d} = \frac{100}{20} = 5 \dots \text{ splněno} \quad (77).$$

## 5.1 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

### 5.1.1 SLABĚ ZAKŘIVENÝ KROUŽEK



Obr. 32 – Uvolnění kroužku s využitím pravidel symetrie

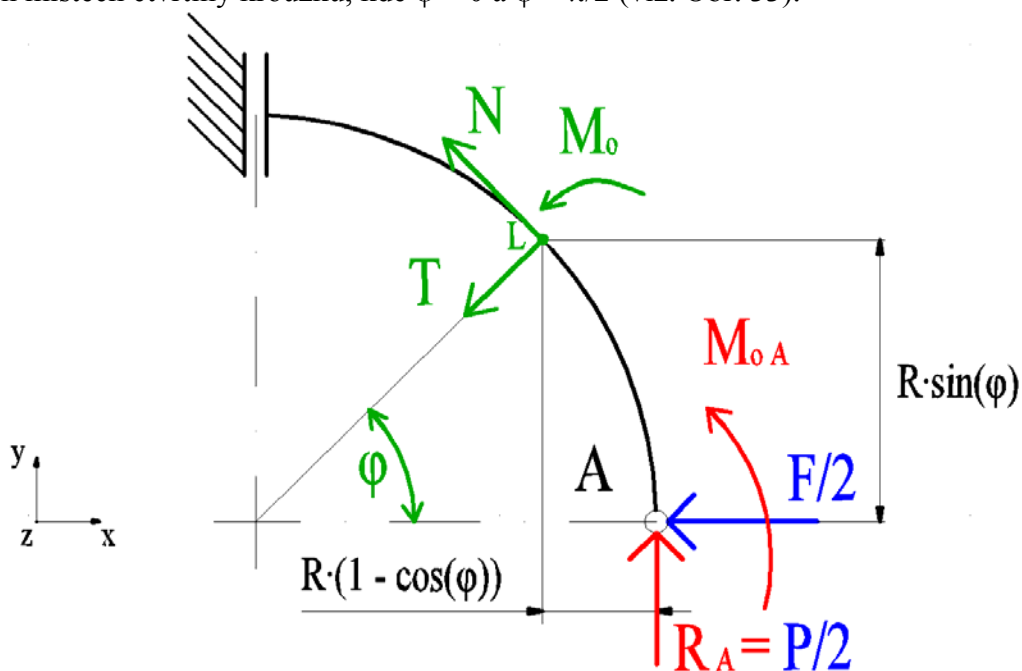
Z podmínek rovnováhy je patrné:

$$R_A = P/2 = 500 \text{ N}, \quad (78)$$

$$R_B = F/2 = 1500 \text{ N}. \quad (79)$$

$M_{0A}$ ,  $M_{0B}$  ... neznámé ohybové momenty, určí se z deformační podmínky

S využitím deformační podmínky (35) a statických podmínek rovnováhy lze určit průběhy výsledných vnitřních účinků. Hodnoty výsledných vnitřních účinků se propočítají v krajních místech čtvrtiny kroužku, kde  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi/2$  (viz. Obr. 33).



Obr. 33 – Zavedení pomyslného řezu pod úhlem  $\varphi$  do čtvrtiny kroužku

### Výpočet velikostí normálových sil $N_{(\varphi)}$

Pro  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi/2$ .

$$\Sigma F_N = 0 \rightarrow N_{(\varphi)} = -\frac{P}{2} \cdot \cos(\varphi) - \frac{F}{2} \cdot \sin(\varphi) \quad (80)$$

Dosazením do vztahu (80) se vypočítají hodnoty normálových sil:

$$N_{(0)} = -\frac{1000}{2} \cdot \cos(0^\circ) - \frac{3000}{2} \cdot \sin(0^\circ) = -500 \text{ N}, \quad (81)$$

$$N_{(\pi/2)} = -\frac{1000}{2} \cdot \cos(90^\circ) - \frac{3000}{2} \cdot \sin(90^\circ) = -1500 \text{ N}. \quad (82)$$

### Výpočet velikostí posouvajících sil $T_{(\varphi)}$

Pro  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi/2$ .

$$\Sigma F_T = 0 \rightarrow T_{(\varphi)} = \frac{P}{2} \cdot \sin(\varphi) - \frac{F}{2} \cdot \cos(\varphi) \quad (83)$$

Dosazením do vztahu (83) se vypočítají hodnoty posouvajících sil:

$$T_{(0)} = \frac{1000}{2} \cdot \sin(0^\circ) - \frac{3000}{2} \cdot \cos(0^\circ) = -1500 \text{ N}, \quad (84)$$

$$T_{(\pi/2)} = \frac{1000}{2} \cdot \sin(90^\circ) - \frac{3000}{2} \cdot \cos(90^\circ) = 500 \text{ N}. \quad (85)$$

### Výpočet ohybových momentů $M_{o(\varphi)}$

$$\Sigma M_L = 0 \rightarrow M_{o(\varphi)} = -M_{oA} - \frac{P}{2} \cdot R \cdot (1 - \cos(\varphi)) + \frac{F}{2} \cdot R \cdot \sin(\varphi) \quad (86)$$

K vypočtení hodnoty momentu  $M_{oA}$  se využije vztahu (43) a po provedení jeho parciální derivace a následné integrace úpravou dostaneme vztah:

$$M_{oA} = \frac{R}{2 \cdot \pi} \cdot [2 \cdot F - P \cdot (\pi - 2)] \quad (87)$$

Dosazením momentu  $M_{oA}$  do vztahu (86) se získá:

$$M_{o(\varphi)} = \frac{R}{2 \cdot \pi} \cdot [F \cdot (-2 + \pi \cdot \sin(\varphi)) + P \cdot (-2 + \pi \cdot \cos(\varphi))]. \quad (88)$$

Dosazením se zjistí velikosti ohybových momentů pro úhly  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi/2$ :

$$\begin{aligned} M_{o(0)} &= \frac{100}{2 \cdot \pi} \cdot [3000 \cdot (-2 + \pi \cdot \sin(0^\circ)) + 1000 \cdot (-2 + \pi \cdot \cos(0^\circ))] = \\ &= -77323,95 \text{ N} \cdot \text{mm}, \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} M_{o(\pi/2)} &= \frac{100}{2 \cdot \pi} \cdot [3000 \cdot (-2 + \pi \cdot \sin(90^\circ)) + 1000 \cdot (-2 + \pi \cdot \cos(90^\circ))] \\ &= 22676,05 \text{ N} \cdot \text{mm}. \end{aligned} \quad (90)$$

Jelikož na čtvrtinu kroužku působí síla ve směru osy x i osy y, je nutné vyšetřit extrémní hodnotu ohybového momentu  $M_{oe}$ , která se nachází pod úhlem  $\varphi_e$ . Vykreslení výsledných vnitřních účinků se provede programem ANSYS 11.0 v numerické části řešení. ANSYS 11.0 vykresluje průběh výsledných vnitřních účinků od extrémní záporné hodnoty po extrémní kladnou hodnotu, proto se pro úplnost spočítá i extrémní hodnota pro normálovou sílu N (pro posouvající sílu T není potřeba).

Hodnoty úhlů pro určení extrémní normálové síly a ohybového momentu se vyjádří z podmínek:

$$\frac{\partial M_{o(\varphi)}}{\partial \varphi} = 0, \quad (91)$$

$$\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} = 0. \quad (92)$$

Po provedení parciálních derivací a následné úpravě, se získává stejná hodnota extrémního úhlu  $\varphi_e$  pro ohybový extrémní ohybový moment i normálovou sílu:

$$\varphi_e = \arctg\left(\frac{F}{P}\right) = \arctg\left(\frac{3000}{1000}\right) = 71,57^\circ. \quad (93)$$

Dosazením úhlu  $\varphi_e$  do vztahu (88) se vypočítá extrémní hodnota momentu  $M_{oe(\varphi_e)}$  a dosazením do vztahu (80) extrémní hodnota normálové síly  $N_{e(\varphi_e)}$ :

$$\begin{aligned} M_{oe(\varphi_e)} &= \frac{100}{2 \cdot \pi} \cdot [3000 \cdot (-2 + \pi \cdot \sin(71,57^\circ)) + 1000 \cdot (-2 + \pi \cdot \cos(71,57^\circ))] \\ &= 30789,93 \text{ N} \cdot \text{mm}, \end{aligned} \quad (94)$$

$$N_{e(\varphi_e)} = -\frac{1000}{2} \cdot \cos(71,57^\circ) - \frac{3000}{2} \cdot \sin(71,57^\circ) = -1581,14 \text{ N}. \quad (95)$$

### Výpočet maximálního napětí $\sigma_{\max}$

Vzniká v místě A ( $\varphi = 0^\circ$ )(viz. Obr. 33, str. 38), kde je ohybový moment maximální. Pro výpočet je uvažováno napětí od ohybového momentu a napětí od normálové síly v tomto místě (smykové napětí  $\tau$  je zanedbatelné).

Napětí v ohybu  $\sigma_o$

$$\sigma_o = \pm \frac{M_{o\max}}{W_o} = \pm \frac{32 \cdot (-77323,95)}{\pi \cdot 20^3} = \pm 98,45 \text{ MPa} \quad (96)$$

Napětí v tahu (tlaku)  $\sigma_{t(d)}$  v místě maximálního ohybového momentu  $M_{o\max}$  je:

$$\sigma_{t(d)} = \frac{N_{(0)}}{S} = \frac{4 \cdot (-500)}{\pi \cdot 20^2} = -1,59 \text{ MPa}. \quad (97)$$



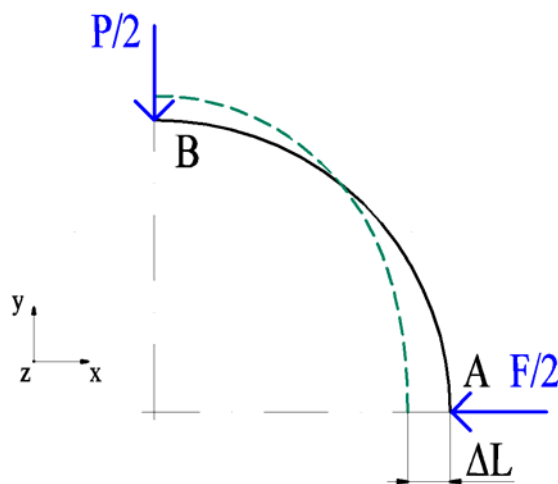
Jelikož napětí od normálové síly  $N$  je se znaménkem minus (charakterizuje tlakové napětí), pak i maximální výsledné napětí dané algebraickým součtem napětí v ohybu a v tlaku bude záporné (tlakové).

$$\sigma_{\max} = \sigma_o + \sigma_{t(d)} = -98,45 - 1,59 = -100,04 \text{ MPa} \quad (98)$$

Pro porovnání výsledků se velikost maximálního napětí  $\sigma_{\max}$  uvede v absolutní hodnotě.

### Výpočet maximálního posunutí $\Delta L$

Maximální posunutí se předpokládá v záporném směru osy  $x$  od místa A, kde působí největší zatěžující síla  $F/2$  (viz. Obr. 34). Jelikož je největší zatěžující síla stejná jako u předešlého příkladu, tak se pro výpočet maximálního prodloužení vycházelo ze stejné podmínky (51), kde  $U$  je dáno vztahem (34). A stejného vztahu (52) jako při zatížení kroužku dvěma silami. Vztah (52) se zjednodušeně napíše jako tvar (53). Parciální derivací a integrací vztahu (52) byly odvozeny vztahy jednotlivých členů:



Obr. 34 – Zobrazení maximálního posunutí

$$\Delta L_N = \frac{R \cdot (2 \cdot P + \pi \cdot F)}{8 \cdot E \cdot S} = \frac{4 \cdot 100 \cdot (2 \cdot 1000 + \pi \cdot 3000)}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 20^2} = 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad (99)$$

$$\begin{aligned} \Delta L_T &= \frac{\beta \cdot R \cdot (\pi \cdot F - 2 \cdot P)}{8 \cdot G \cdot S} = \frac{4 \cdot 32/27 \cdot 100 \cdot (\pi \cdot 3000 - 2 \cdot 1000)}{8 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 20^2} \\ &= 4,38 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \Delta L_{M_o} &= \frac{-R^3 \cdot \left( F + P - \frac{\pi \cdot P}{4} - \frac{\pi^2 \cdot F}{8} \right)}{\pi \cdot E \cdot J} \\ &= \frac{-64 \cdot 100^3 \cdot \left( 3000 + 1000 - \frac{\pi \cdot 1000}{4} - \frac{\pi^2 \cdot 3000}{8} \right)}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 20^4} = 93,89 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \end{aligned} \quad (101)$$

Sečtením výsledných hodnot ze vztahů (99), (100), (101) byla získána hodnota maximálního posunutí v záporném smyslu osy  $x$ :

$$\Delta L = 2,16 \cdot 10^{-3} + 4,38 \cdot 10^{-3} + 93,89 \cdot 10^{-3} = 100,43 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (102)$$

### 5. 1. 2 SILNĚ ZAKŘIVENÝ KROUŽEK

Výpočet poloměru křivosti neutrální osy  $r$  (58) a výpočet posunutí vzhledem ke střednici  $z_0$  (59) je shodný jako u zatížení kroužku dvěma silami, proto není nutné jej znovu počítat.

Výpočet velikostí normálových sil  $N_{(\varphi)}$  a posouvajících sil  $T_{(\varphi)}$  je stejný jako pro kroužek, řešený podle teorie tenkých křivých prutů.

#### Výpočet ohybových momentů $M_{o(\varphi)}$

K výpočtu velikostí ohybových momentů  $M_{o(\varphi)}$  pro kroužek, řešený jako tlustý křivý prut se využije deformační podmínky (63). Po provedení parciální derivace a integrace dostáváme vztah pro moment  $M_{oA}$ :

$$M_{oA} = \frac{R \cdot (-\pi \cdot P + 2 \cdot P + 2 \cdot F) + 2 \cdot z_0 \cdot (-P - F)}{\pi \cdot 2}. \quad (103)$$

Doplněním do vztahu (86) se dostane vztah pro určení průběhu ohybových momentů  $M_{o(\varphi)}$  silně zakřiveného kroužku:

$$M_{o(\varphi)} = -\frac{R(-\pi P + 2P + 2F) + 2 \cdot z_0 \cdot (-P - F)}{\pi \cdot 2} - \frac{P}{2} \cdot R(1 - \cos(\varphi)) + \frac{F}{2} \cdot R \sin(\varphi). \quad (104)$$

Ze vztahu (104) se vypočítají velikosti ohybových momentů pro  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \pi/2$ :

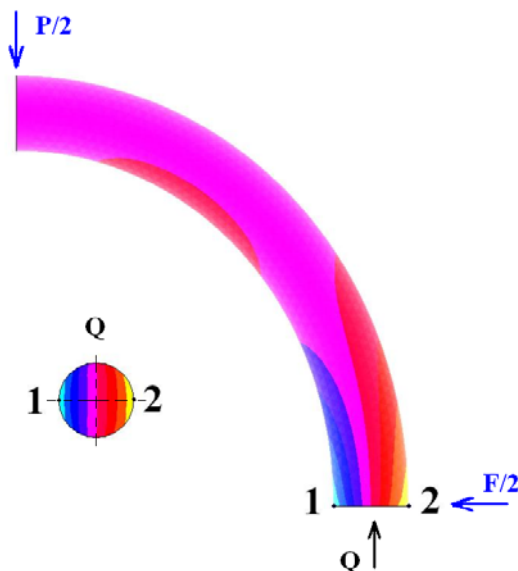
$$\begin{aligned} M_{o(0)} &= -\frac{100(-\pi \cdot 1000 + 2 \cdot 1000 + 2 \cdot 3000) + 2 \cdot 0,251 \cdot (-1000 - 3000)}{\pi \cdot 2} \\ &\quad - \frac{1000}{2} \cdot 100 \cdot (1 - \cos(0^\circ)) + \frac{3000}{2} \cdot 100 \cdot \sin(0^\circ) \\ &= -77004,37 \text{ N} \cdot \text{mm}, \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} M_{o(\pi/2)} &= -\frac{100(-\pi \cdot 1000 + 2 \cdot 1000 + 2 \cdot 3000) + 2 \cdot 0,251 \cdot (-1000 - 3000)}{\pi \cdot 2} \\ &\quad - \frac{1000}{2} \cdot 100 \cdot (1 - \cos(90^\circ)) + \frac{3000}{2} \cdot 100 \cdot \sin(90^\circ) \\ &= 22995,63 \text{ N} \cdot \text{mm}. \end{aligned} \quad (106)$$

Vykreslení vnitřních výsledných účinků má tedy obdobný průběh jako u kroužku, řešeného podle teorie tenkých křivých prutů a bude vykresleno v numerické části řešení slabě zakřiveného kroužku (viz. str. 46).

### Výpočet redukovaného napětí $\sigma_{red}$

Ohybové napětí je počítáno v místě 1 (kde jsou vlákna tažena) a v místě 2 (kde jsou vlákna stlačována) dle Obr. 35. Pro výpočet redukovaného napětí dle HMM hypotézy se vybere větší z těchto napětí.



Obr. 35 – Zobrazení tažených (stlačovaných) míst

Výpočet ohybového napětí  $\sigma_o$

$$\sigma_{o1} = -\frac{M_{o\max}}{S \cdot z_0} \cdot \frac{\frac{d}{2} - z_0}{R - \frac{d}{2}} = -\frac{4 \cdot (-77004,37)}{\pi \cdot 20^2 \cdot 0,251} \cdot \frac{\frac{20}{2} - 0,251}{100 - \frac{20}{2}} = 105,78 \text{ MPa} \quad (107)$$

$$\sigma_{o2} = \frac{M_{o\max}}{S \cdot z_0} \cdot \frac{\frac{d}{2} + z_0}{R + \frac{d}{2}} = \frac{4 \cdot (-77004,37)}{\pi \cdot 20^2 \cdot 0,251} \cdot \frac{\frac{20}{2} + 0,251}{100 + \frac{20}{2}} = -91,01 \text{ MPa} \quad (108)$$

Tahové (tlakové) napětí  $\sigma_{t(d)}$  je stejné jako ve vztahu (97) pro slabě zakřivený kroužek, hodnota tohoto napětí je -1,59 MPa. Velikost smykového napětí  $\tau$  je zanedbatelné. Vztah pro výpočet redukovaného napětí pak je:

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_{o2} + \sigma_{t(d)})^2} = \sqrt{(105,78 - 1,59)^2} = 104,19 \text{ MPa.} \quad (109)$$

### Výpočet maximálního posunutí $\Delta L$

Maximální posunutí se předpokládá v záporném směru osy x od místa A, kde působí největší zatěžující síla  $F/2$  (viz. Obr. 34, str. 41). Pro výpočet se využije vztah (72), jehož parciálním derivováním a integrováním se zjistí potřebné vztahy členů pro výpočet maximálního posunutí. První dva členy  $\Delta L_N$  a  $\Delta L_T$  mají stejnou hodnotu jako pro kroužek, řešený podle teorie tenkých křivých prutů, a proto se k vypočtení maximálního posunutí použijí vztahy (99) a (100), kde  $\Delta L_N$  je  $2,16 \cdot 10^{-3}$  mm a  $\Delta L_T$  je  $4,38 \cdot 10^{-3}$  mm. Další členy jsou následující:

$$\begin{aligned}\Delta L_{M_0} &= \frac{4 \cdot (8 \cdot F \cdot z_0^2 - 8 \cdot P \cdot R^2 + 8 \cdot P \cdot z_0^2 - 8 \cdot F \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot P \cdot R^2 + \pi^2 \cdot F \cdot R^2)}{8 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot d^2 \cdot z_0} \\ &= \frac{4 \cdot (8 \cdot 3000 \cdot 0,251^2 - 8 \cdot 1000 \cdot 100^2 + 8 \cdot 1000 \cdot 0,251^2 - 8 \cdot 3000 \cdot 100^2 + 2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot 100^2 + \pi^2 \cdot 3000 \cdot 100^2)}{8 \cdot \pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 20^2 \cdot 0,251} \\ &= 93,52 \cdot 10^{-3} \text{ mm},\end{aligned}\tag{110}$$

$$\begin{aligned}L_{M_0N} &= - \frac{4 \cdot (8 \cdot F \cdot z_0 - 8 \cdot P \cdot R + 8 \cdot P \cdot z_0 - 8 \cdot F \cdot R + 2 \cdot \pi \cdot P \cdot R + \pi^2 \cdot F \cdot R)}{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot d^2} \\ &= - \frac{4 \cdot (8 \cdot 3000 \cdot 0,251 - 8 \cdot 1000 \cdot 100 + 8 \cdot 1000 \cdot 0,251 - 8 \cdot 3000 \cdot 100 + 2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot 100 + \pi^2 \cdot 3000 \cdot 100)}{4 \cdot \pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 20^2} \\ &= -0,48 \cdot 10^{-3} \text{ mm}.\end{aligned}\tag{111}$$

Sečtením výsledných hodnot ze vztahů (99), (100), (110) a (111) byla získána hodnota maximálního posunutí v záporném smyslu osy x:

$$\Delta L = 2,16 \cdot 10^{-3} + 4,38 \cdot 10^{-3} + 93,52 \cdot 10^{-3} - 0,48 \cdot 10^{-3} = 99,58 \cdot 10^{-3} \text{ mm}.\tag{112}$$

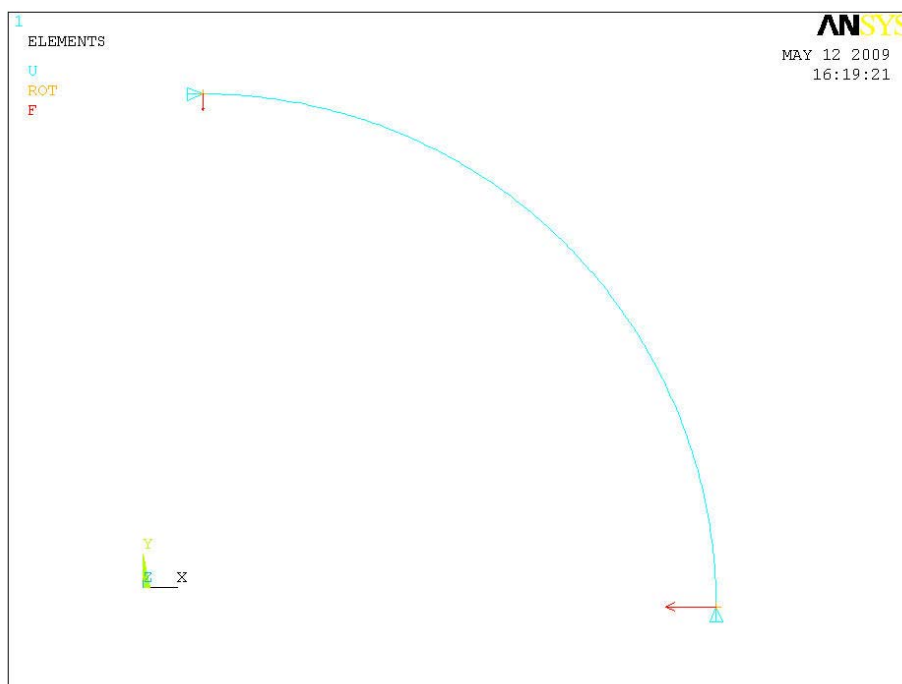
## 5.2 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

### 5.2.1 SLABĚ ZAKŘIVENÝ KROUŽEK

S využitím pravidel symetrie byla v programu ANSYS 11.0 vymodelována pouze čtvrtina kroužku. Pro řešení kroužku, jako tenkého křivého prutu zatíženého čtyřmi silami bylo vytvořeno makro (viz. 9.2 Makro – kroužek zatížený čtyřmi silami).

#### Zatížení a uložení kroužku

Uložení kroužku je stejné jako u předchozího příkladu, byla jen přidána zatěžující síla, která se na Obr. 36 projevila jako malá červená šipka působící v záporném smyslu osy y.



**Obr. 36 – Zatížení a uložení čtvrtiny kroužku v programu ANSYS 11.0**

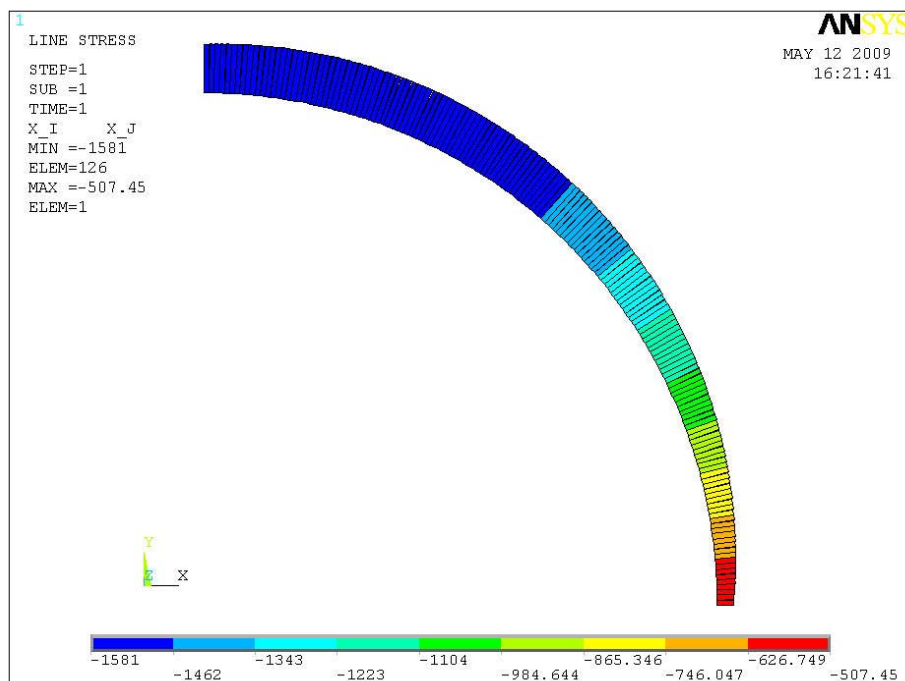
## Deformovaný tvar

Na Obr. 37 je modře znázorněn zdeformovaný tvar a černě původní tvar kroužku.

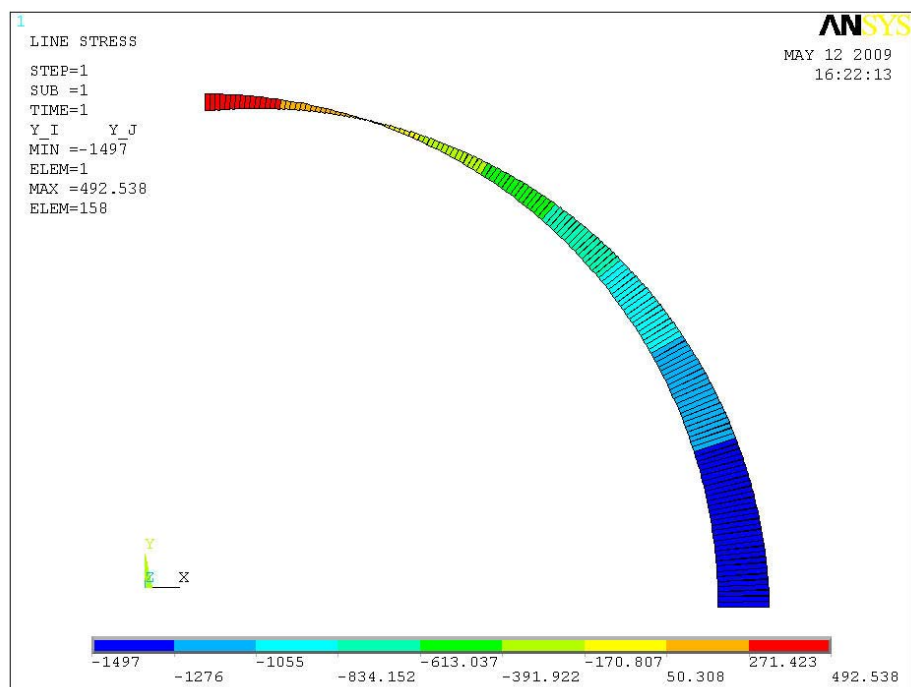


Obr. 37 – Zdeformovaný tvar

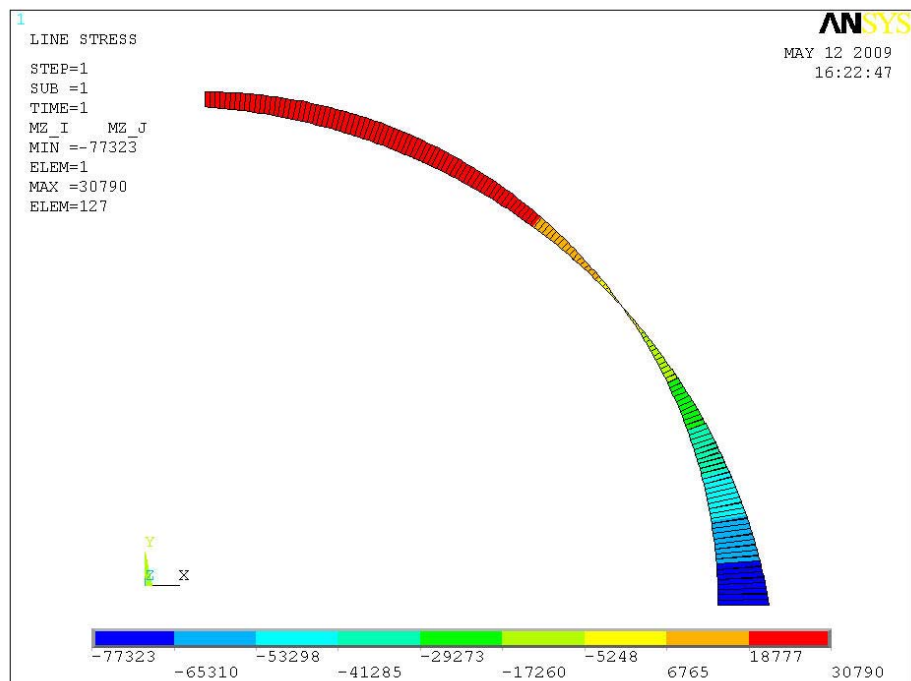
## Vykreslení výsledných vnitřních účinků



Obr. 38 – Průběh normálových sil N [N]



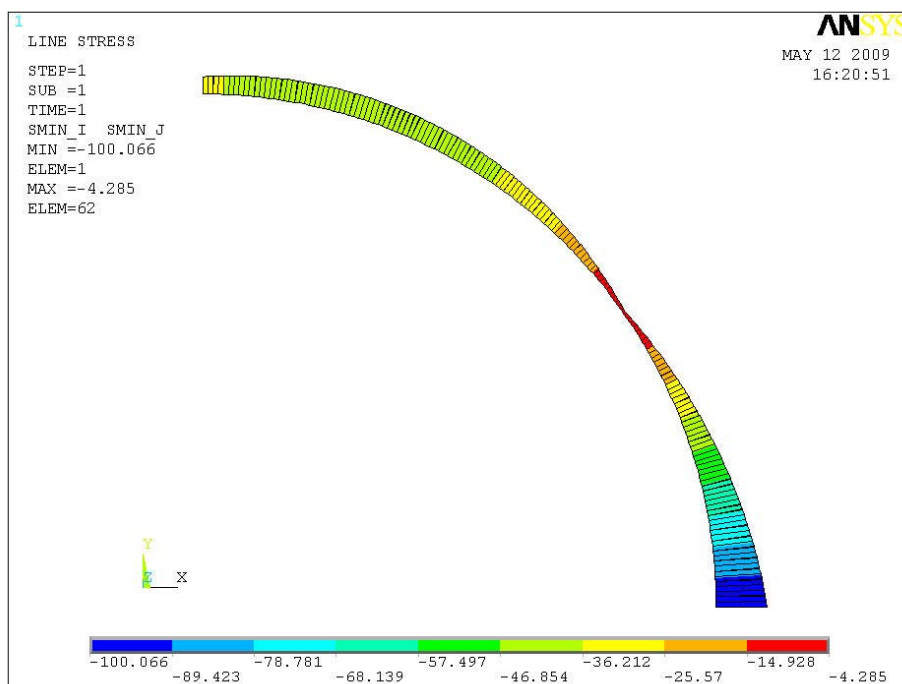
**Obr. 39 – Průběh posouvajících sil T [N]**



**Obr. 40 – Průběh ohybových momentů  $M_0$  [N·mm]**

### Určení výsledného maximálního napětí $\sigma_{\max}$

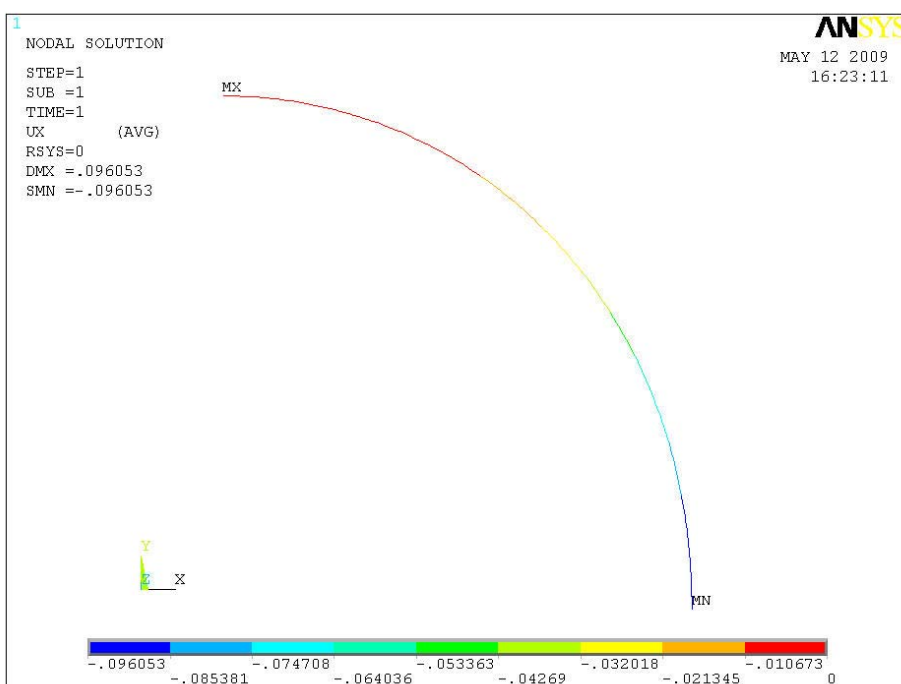
Pro porovnání výsledků se velikost maximálního napětí  $\sigma_{\max}$  uvede v absolutní hodnotě.



Obr. 41 – Průběh výsledného napětí [MPa]

### Určení maximálního posunutí $\Delta L$

Program ANSYS 11.0 vykreslil toto posunutí záporné podle orientace směru osy x. Pro porovnání výsledků se toto posunutí dosadí v absolutní hodnotě.



Obr. 42 – Zobrazení maximálního posunutí [mm]

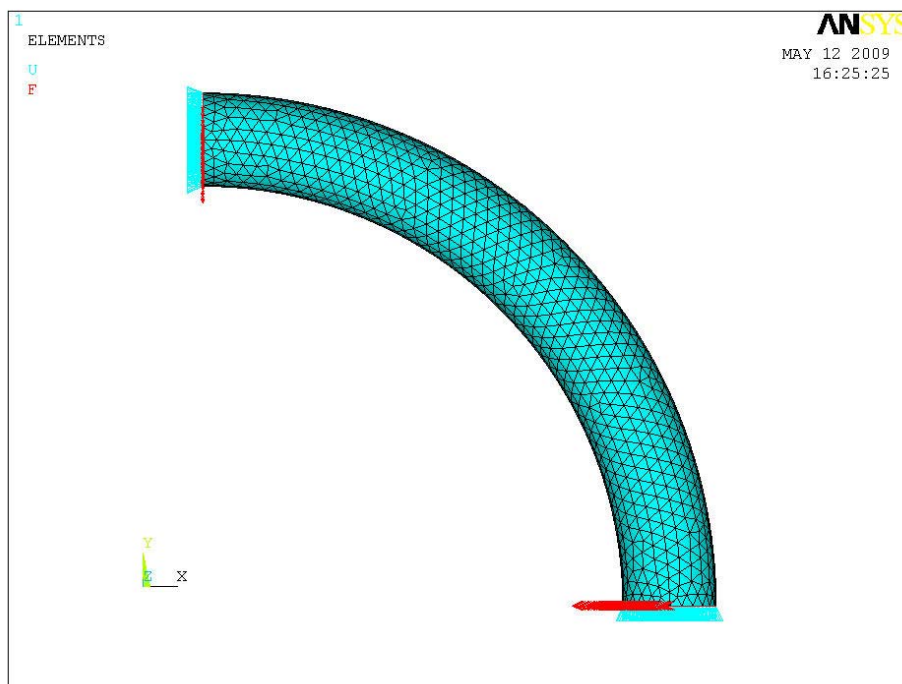


### 5. 2. 2 SILNĚ ZAKŘIVENÝ KROUŽEK

S využitím pravidel symetrie je v programu ANSYS 11.0 vymodelována pouze čtvrtina kroužku. Pro řešení kroužku, jako silně zakřiveného prutu zatíženého čtyřmi silami bylo vytvořeno makro (viz. 9.2 Makro – kroužek zatížený čtyřmi silami).

#### **Zatížení a uložení kroužku**

Zatěžující síly jsou znázorněny červenou barvou a jsou aplikovány na plochách dle obrázku. Jejich hodnoty jsou poděleny počtem uzlů, které se na těchto plochách vyskytují. Odebrané posuvy ploch ve směru osy x a taky ve směru osy y jsou znázorněny modrými trojúhelníčky.

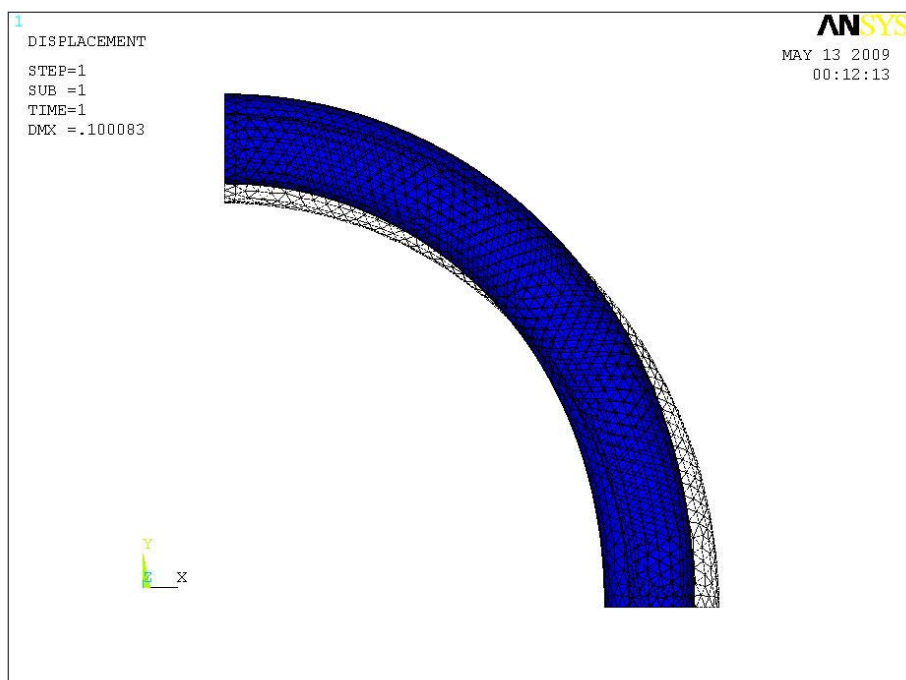


**Obr. 43 – Zatížení a uložení čtvrtiny kroužku v programu ANSYS 11.0**

Vykreslení výsledných vnitřních účinků je obdobné jako pro kroužek, řešený podle teorie tenkých křivých prutů (viz. str. 46), a proto není nutné jej znovu vykreslovat.

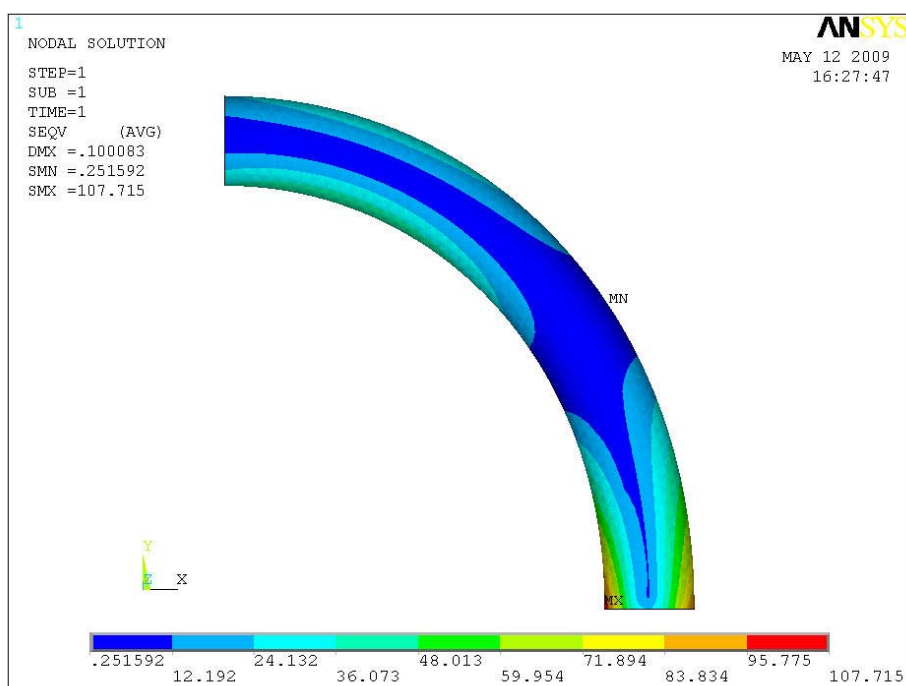
## Deformovaný tvar

Modrou barvou je na Obr. 44 znázorněn zdeformovaný tvar a černě původní tvar kroužku.

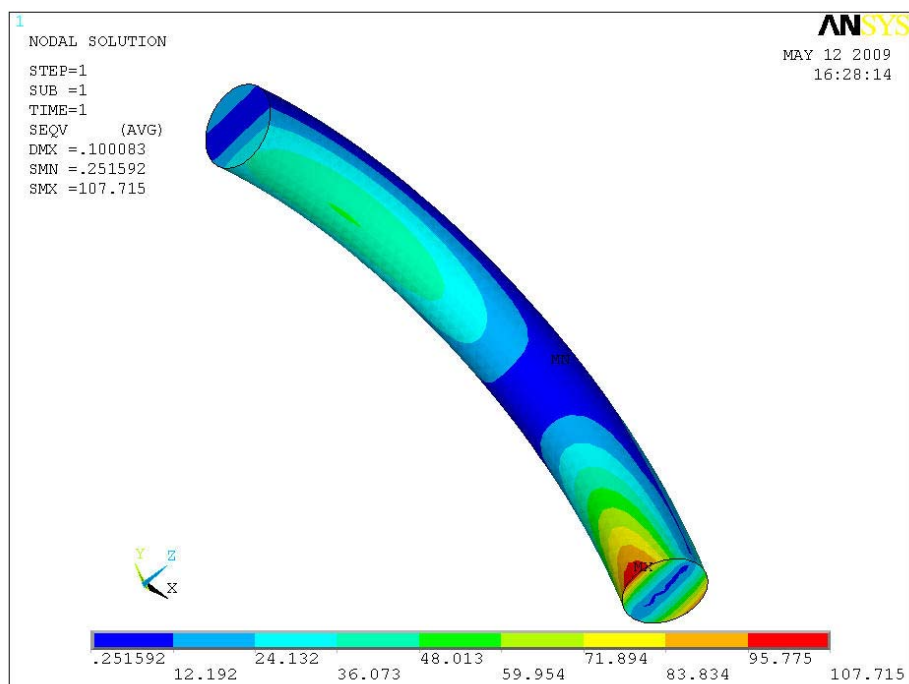


Obr. 44 – Zdeformovaný tvar

## Určení redukovaného napětí $\sigma_{red}$ dle hypotézy HMH



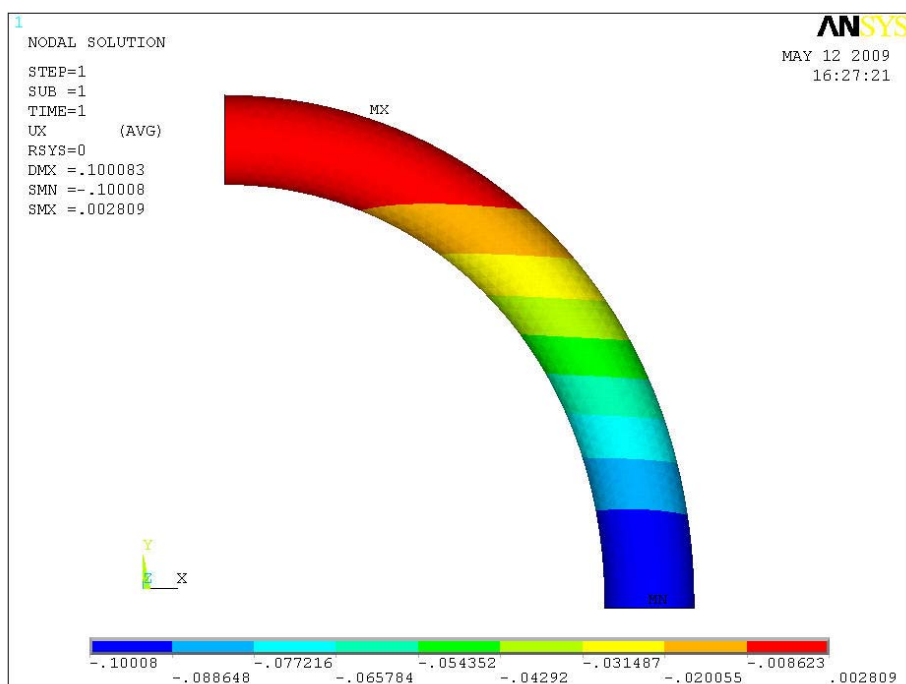
Obr. 45a – Rozložení napětí dle HMH hypotézy [MPa]



**Obr. 45b – Rozložení napětí dle HMH hypotézy [MPa] (pootočený pohled)**

### Určení maximálního posunutí $\Delta L$

Program ANSYS 11.0 vykreslil toto posunutí záporné podle orientace směru osy x. Pro porovnání výsledků se toto posunutí dosadí v absolutní hodnotě.



**Obr. 46 – Zobrazení maximálního posunutí [mm]**

### 5.3 POROVNÁNÍ DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ ZATÍŽENÍ KROUŽKU ČTYŘMI SILAMI

Porovnávaná veličina	ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ		Chyba [%]
	Teorie tenkých křivých prutů	Teorie tlustých křivých prutů	
<b>Napětí [MPa]</b>	$ -100,04 $	104,19	3,98
<b>Posunutí [mm]</b>	$100,43 \cdot 10^{-3}$	$99,58 \cdot 10^{-3}$	0,85

**Tab. 5 – Analytické porovnání výsledků podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů**

Porovnávaná veličina	NUMERICKÉ ŘEŠENÍ		Chyba [%]
	Teorie tenkých křivých prutů	Teorie tlustých křivých prutů	
<b>Napětí [MPa]</b>	$ -100,07 $	107,72	7,1
<b>Posunutí [mm]</b>	$ -96,05  \cdot 10^{-3}$	$ -100,08  \cdot 10^{-3}$	4,03

**Tab. 6 – Numerické porovnání výsledků podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů**

Porovnávaná veličina	KROUŽEK ŘEŠENÝ JAKO TENKÝ KŘIVÝ PRUT		Chyba [%]
	Analytické řešení	Numerické řešení	
<b>Napětí [MPa]</b>	$ -100,04 $	$ -100,07 $	0,03
<b>Posunutí [mm]</b>	$100,43 \cdot 10^{-3}$	$ -96,05  \cdot 10^{-3}$	4,36

**Tab. 7 – Porovnání výsledků pro kroužek řešený jako tenký křivý prut**

Porovnávaná veličina	KROUŽEK ŘEŠENÝ JAKO TLUSTÝ KŘIVÝ PRUT		Chyba [%]
	Analytické řešení	Numerické řešení	
<b>Napětí [MPa]</b>	104,19	107,72	3,28
<b>Posunutí [mm]</b>	$99,58 \cdot 10^{-3}$	$ -100,08  \cdot 10^{-3}$	0,50

**Tab. 8 – Porovnání výsledků pro kroužek řešený jako tlustý křivý prut**

## 6. POLOVINA KROUŽKU ZATÍŽENÁ TLAKEM

Polovina kroužku obdélníkového průřezu je po celém vnějším obvodu zatížena měrným tlakem  $p$  (viz. Obr. 47). Rozměry kroužku jsou opět voleny tak, ať je poměr poloměru zakřivení střednice vzhledem k výšce profilu v rovině střednice roven pěti. Výpočet se provede podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů analyticky i numericky a výsledné hodnoty se navzájem porovnají.

Výpočet je proveden pro následující hodnoty:

$$R = 100 \text{ mm}$$

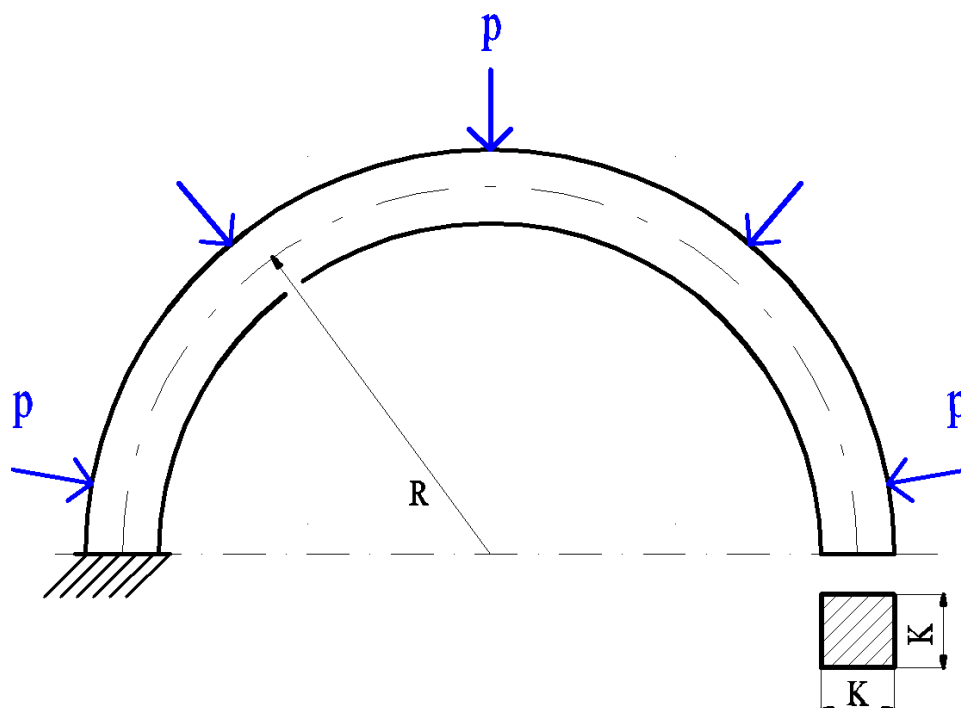
$$K = 20 \text{ mm}$$

$$p = 0,3 \text{ MPa}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0,3 [-]$$



Obr. 47 – Polovina kroužku zatížená tlakem po vnějším obvodu

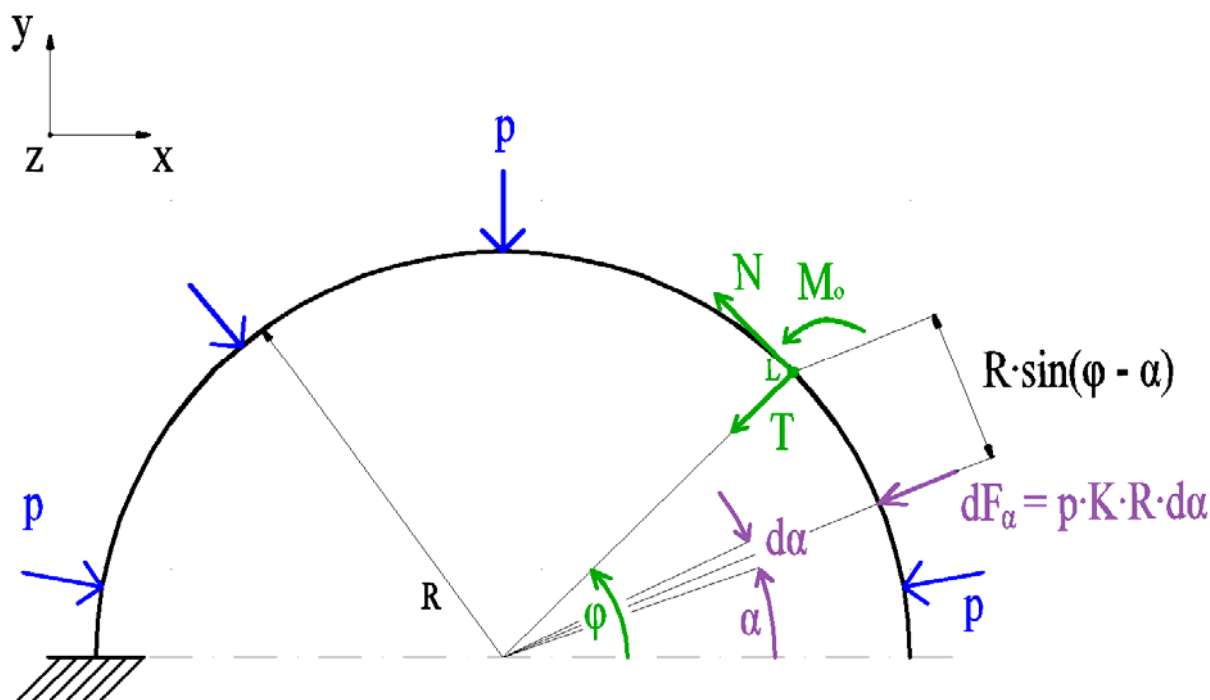
Ověření, zda je poměr  $R/h = 5$  dle zadání:

$$\frac{R}{h} = \frac{R}{K} = \frac{100}{20} = 5 \dots \text{splněno.} \quad (113)$$

## 6.1 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

### 6.1.1 SLABĚ ZAKŘIVENÁ POLOVINA KROUŽKU

Jedná se o úlohu staticky určitou. Ze statických podmínek rovnováhy lze určit průběhy výsledných vnitřních účinků. Hodnoty výsledných vnitřních účinků se propočítají v místech, kde  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  a  $\varphi = \pi$ . Pro výpočet zavádíme elementární sílu  $dF_\alpha$ , která působí pod úhlem  $\alpha$  na plošce  $K \cdot R \cdot d\alpha$  (viz. Obr. 48).



Obr. 48 – Zavedení pomyslného řezu pod úhlem  $\varphi$  do poloviny kroužku

#### Výpočet normálových sil $N_{(\varphi)}$

Pro  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  a  $\varphi = \pi$ .

$$\Sigma F_N = 0 \rightarrow -N_{(\varphi)} - \int_0^\varphi p \cdot K \cdot R \cdot \sin(\varphi - \alpha) d\alpha = 0 \quad (114)$$

Po integraci se získá tvar:

$$N_{(\varphi)} = -p \cdot K \cdot R (1 - \cos(\varphi)). \quad (115)$$

Dosazením do vztahu (115) se vypočítají hodnoty normálových sil:

$$N_{(0)} = -0,3 \cdot 20 \cdot 100 \cdot (1 - \cos(0^\circ)) = 0,00 \text{ N}, \quad (116)$$

$$N_{(\pi/2)} = -0,3 \cdot 20 \cdot 100 \cdot (1 - \cos(90^\circ)) = -600,00 \text{ N}, \quad (117)$$

$$N_{(\pi)} = -0,3 \cdot 20 \cdot 100 \cdot (1 - \cos(180^\circ)) = -1200,00 \text{ N}. \quad (118)$$

### Výpočet velikostí posouvajících sil $T_{(\varphi)}$

Pro  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  a  $\varphi = \pi$ .

$$\Sigma F_T = 0 \rightarrow T_{(\varphi)} + \int_0^{\varphi} p \cdot K \cdot R \cdot \cos(\varphi - \alpha) d\alpha = 0 \quad (119)$$

Po integraci se získá tvar:

$$T_{(\varphi)} = -p \cdot K \cdot R \cdot \sin(\varphi). \quad (120)$$

Dosazením do vztahu (120) se vypočítají hodnoty posouvajících sil:

$$T_{(0)} = -0,3 \cdot 20 \cdot 100 \cdot \sin(0^\circ) = 0,00 \text{ N}, \quad (121)$$

$$T_{(\pi/2)} = -0,3 \cdot 20 \cdot 100 \cdot \sin(90^\circ) = -600,00 \text{ N}, \quad (122)$$

$$T_{(\pi)} = -0,3 \cdot 20 \cdot 100 \cdot \sin(180^\circ) = 0,00 \text{ N}, \quad (123)$$

### Výpočet ohybových momentů $M_{o(\varphi)}$

Pro  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  a  $\varphi = \pi$ .

$$\Sigma M_L = 0 \rightarrow M_{o(\varphi)} - \int_0^{\varphi} p \cdot K \cdot R \cdot R \cdot \sin(\varphi - \alpha) d\alpha = 0 \quad (124)$$

Po integraci obdržíme tvar:

$$M_{o(\varphi)} = p \cdot K \cdot R^2 (1 - \cos(\varphi)). \quad (125)$$

Dosazením do vztahu (125) se vypočítají hodnoty ohybových momentů:

$$M_{o(0)} = 0,3 \cdot 20 \cdot 100^2 (1 - \cos(0^\circ)) = 0,00 \text{ N} \cdot \text{mm}, \quad (126)$$

$$M_{o(\pi/2)} = 0,3 \cdot 20 \cdot 100^2 (1 - \cos(90^\circ)) = 60000,00 \text{ N} \cdot \text{mm}, \quad (127)$$

$$M_{o(\pi)} = 0,3 \cdot 20 \cdot 100^2 (1 - \cos(180^\circ)) = 120000,00 \text{ N} \cdot \text{mm}. \quad (128)$$

Vykreslení výsledných vnitřních účinků je obdobné jako u numerického řešení a bude vykresleno programem ANSYS 11.0 v numerické části řešení (viz. str. 61).

### Výpočet maximálního napětí $\sigma_{\max}$

Maximální napětí vzniká v místě vetknutí ( $\varphi=180^\circ$ ) (viz. Obr. 48, str. 54), kde je ohybový moment maximální. Pro výpočet je uvažováno napětí od ohybového momentu a napětí od normálové síly (smykové napětí  $\tau$  je zanedbatelné).

Napětí v ohybu  $\sigma_o$ :

$$\sigma_o = \pm \frac{M_{o\max}}{W_o} = \pm \frac{6 \cdot (120000)}{20^3} = \pm 90,00 \text{ MPa}. \quad (129)$$

Napětí v tahu (tlaku)  $\sigma_{t(d)}$  v místě maximálního ohybového momentu  $M_{0max}$ :

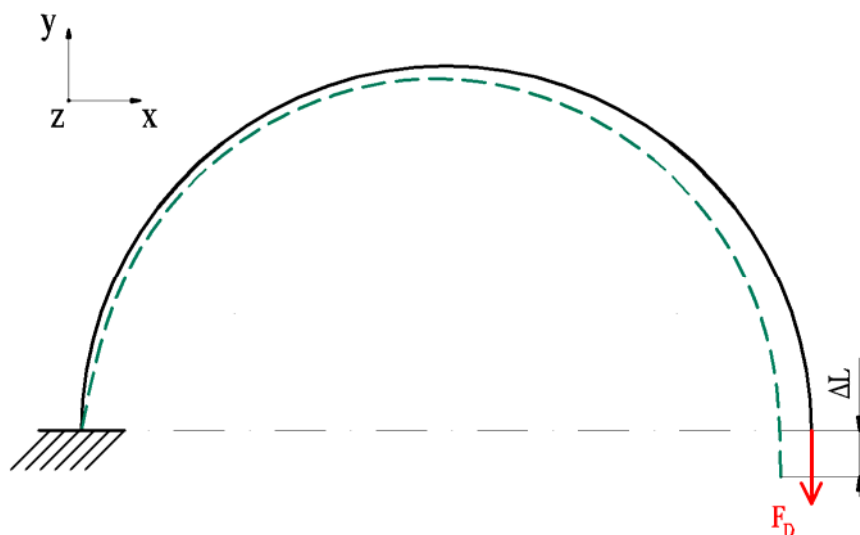
$$\sigma_{t(d)} = \frac{N_{(\pi)}}{S} = \frac{-1200}{20^2} = -3,00 \text{ MPa.} \quad (130)$$

$$\sigma_{max} = \sigma_o + \sigma_{t(d)} = -90,00 - 3,00 = -93,00 \text{ MPa} \quad (131)$$

Pro porovnání výsledků se velikost maximálního napětí  $\sigma_{max}$  uvede v absolutní hodnotě.

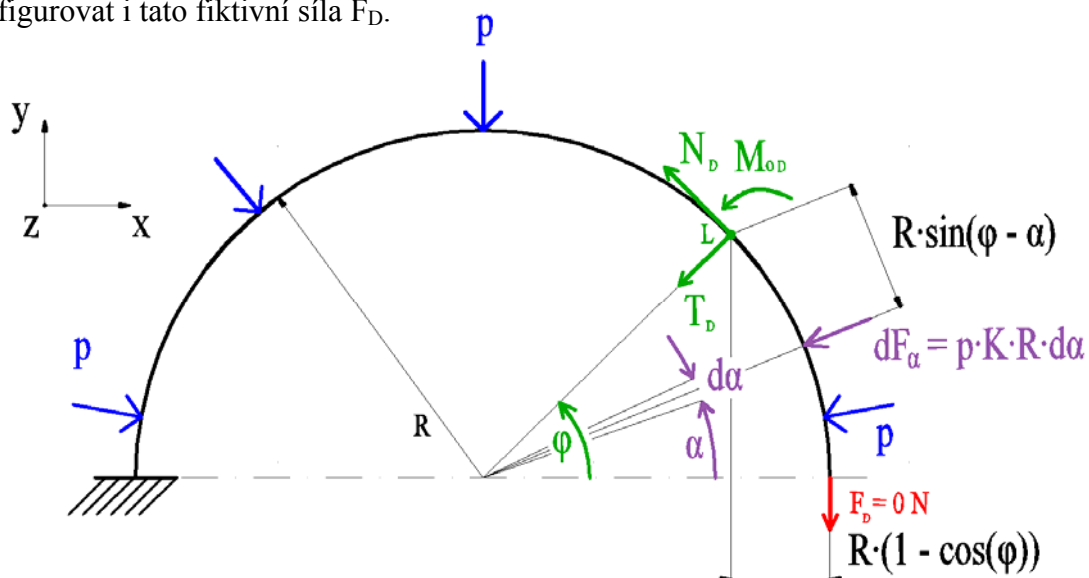
### Výpočet maximálního posunutí $\Delta L$

Maximální posunutí se předpokládá v záporném směru osy y od volného konce kroužku, proto se pro výpočet zavádí v tomto místě fiktivní síla  $F_D$  nulové hodnoty (viz. Obr. 49).



Obr. 49 – Zobrazení maximálního posunutí  $\Delta L$  a fiktivní síly  $F_D$

Ze statických podmínek rovnováhy určíme nové výsledné vnitřní účinky, ve kterých bude konfigurovat i tato fiktivní síla  $F_D$ .



Obr. 50 – Rozbor zatížení při zavedení fiktivní síly  $F_D$



Výsledné průběhy vnitřních výsledných účinků se zavedenou fiktivní silou  $F_D$  jsou dány vztahy:

$$\Sigma F_{N_D} = 0 \rightarrow N_{D(\varphi)} = -p \cdot K \cdot R(1 - \cos(\varphi)) + F_D \cdot \cos(\varphi), \quad (132)$$

$$\Sigma F_{T_D} = 0 \rightarrow T_{D(\varphi)} = -p \cdot K \cdot R \cdot \sin(\varphi) - F_D \cdot \sin(\varphi), \quad (133)$$

$$\Sigma M_L = 0 \rightarrow M_{oD(\varphi)} = p \cdot K \cdot R^2(1 - \cos(\varphi)) + F_D \cdot R \cdot (1 - \cos(\varphi)). \quad (134)$$

Pro výpočet maximálního posunutí v ose y se vychází z podmínky:

$$\Delta L = \frac{\partial U}{\partial F_D}, \quad (135)$$

kde  $U$  je dáno vztahem (34).

Dosazením do (135) se získá vztah:

$$\Delta L = \frac{1}{E \cdot S} \cdot \int_{(s)} N_D \cdot \frac{\partial N_D}{\partial F_D} ds + \frac{\beta}{G \cdot S} \cdot \int_{(s)} T_D \cdot \frac{\partial T_D}{\partial F_D} ds + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_{(s)} M_{oD} \cdot \frac{\partial M_{oD}}{\partial F_D} ds. \quad (136)$$

Provedením patřičných parciálních derivací a následných integrací se získají následující členy pro výpočet maximálního posunutí:

$$\Delta L_N = \frac{\pi \cdot K \cdot R^2 \cdot p}{2 \cdot E \cdot S} = \frac{\pi \cdot 20 \cdot 100^2 \cdot 0,3}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 20^2} = 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad (137)$$

$$\Delta L_T = \frac{\pi \cdot K \cdot R^2 \cdot p \cdot \beta}{2 \cdot G \cdot S} = \frac{\pi \cdot 20 \cdot 100^2 \cdot 0,3 \cdot 6/5}{2 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot A^2} = 3,53 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad (138)$$

$$\Delta L_{M_o} = \frac{K \cdot R^4 \cdot p \cdot 3 \cdot \pi}{2 \cdot E \cdot J} = \frac{12 \cdot 20 \cdot 100^4 \cdot 0,3 \cdot 3 \cdot \pi}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 20^4} = 1009,80 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \quad (139)$$

Sečtením výsledných hodnot ze vztahů (137), (138), (139) byla získána hodnota maximálního posunutí v záporném smyslu osy y:

$$\Delta L = 1,12 \cdot 10^{-3} + 3,53 \cdot 10^{-3} + 1009,80 \cdot 10^{-3} = 1014,45 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \quad (140)$$

## 6. 2. 2 SILNĚ ZAKŘIVENÁ POLOVINA KROUŽKU

**Výpočet poloměru křivosti neutrální osy r:**

$$r = \frac{K}{\ln \left( \frac{R + \frac{K}{2}}{R - \frac{K}{2}} \right)} = \frac{20}{\ln \left( \frac{100 + \frac{20}{2}}{100 - \frac{20}{2}} \right)} = 99,666 \text{ mm.} \quad (141)$$

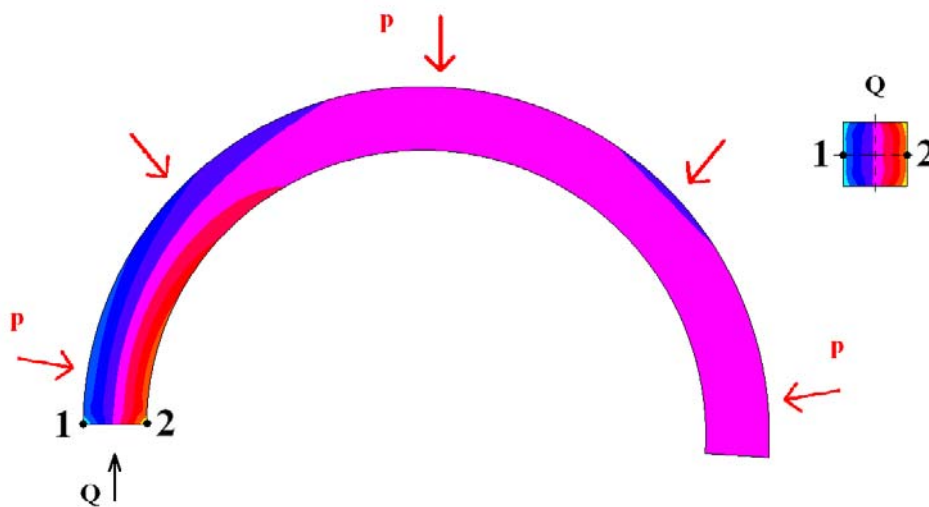
**Výpočet posunutí vzhledem ke střednici  $z_0$ :**

$$z_0 = R - r = 100 - 99,666 = 0,334 \text{ mm.} \quad (142)$$

Vykreslení vnitřních výsledných účinků má tedy obdobný průběh jako u poloviny slabě zakřiveného kroužku a bude vykresleno v numerické části řešení (viz. str. 61).

**Výpočet maximálního redukovaného napětí  $\sigma_{\text{red}}$**

Ohybové napětí je počítáno v místě 1 (kde jsou vlákna tažena) a v místě 2 (kde jsou vlákna stlačována) dle Obr. 51. Pro výpočet redukovaného napětí dle HMM hypotézy se vybere větší z těchto napětí.



**Obr. 51 – Zobrazení tažených (stlačovaných) míst**

Výpočet ohybového napětí  $\sigma_o$

$$\sigma_{o1} = \frac{M_{\text{omax}}}{S \cdot z_0} \cdot \frac{\frac{K}{2} + z_0}{R + \frac{K}{2}} = \frac{120000}{20^2 \cdot 0,334} \cdot \frac{\frac{20}{2} + 0,334}{100 + \frac{20}{2}} = 84,38 \text{ MPa} \quad (143)$$

$$\sigma_{o2} = -\frac{M_{\text{omax}}}{S \cdot z_0} \cdot \frac{\frac{K}{2} - z_0}{R - \frac{K}{2}} = -\frac{120000}{20^2 \cdot 0,334} \cdot \frac{\frac{20}{2} - 0,334}{100 - \frac{20}{2}} = -96,47 \text{ MPa} \quad (144)$$

Tahového (tlakové) napětí  $\sigma_{t(d)}$  je stejné jako ve vztahu (130) pro polovinu kroužku, řešenou podle teorie tenkých křivých prutů, hodnota tohoto napětí je -3 MPa. Velikost smykového napětí  $\tau$  je zanedbatelná.

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_{o2} + \sigma_{t(d)})^2} = \sqrt{(-96,47 - 3)^2} = 99,47 \text{ MPa} \quad (145)$$

### Výpočet maximálního posunutí $\Delta L$

Stejně jako pro polovinu slabě zakřiveného kroužku, tak i pro polovinu kroužku řešenou jako tlustý křivý prut se musí pro výpočet posunutí zavést fiktivní síla  $F_D$  nulové hodnoty v místě volného konce kroužku, kde se předpokládá maximální posunutí v záporném směru osy y (viz. Obr. 49, str. 56). Poté se určí průběhy výsledných vnitřních účinků, které jsou stejné jako vztahy (136), (137) a (138). Pro výpočet maximálního posunutí se vychází z podmínky (139), kde  $U$  je dáno vztahem (61). Dosazením do vztahu (139) se dostane tvar:

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{1}{ES} \int_{(s)} N_D \frac{\partial N_D}{\partial F_D} ds + \frac{\beta}{GS} \int_{(s)} T_D \cdot \frac{\partial T_D}{\partial F_D} ds + \frac{1}{ESRz_0} \int_{(s)} M_{oD} \frac{\partial M_{oD}}{\partial F_D} ds \\ & + \frac{1}{ESR} \int_{(s)} \left( M_{oD} \frac{\partial N_D}{\partial F_D} + N_D \frac{\partial M_{oD}}{\partial F_D} \right) ds. \end{aligned} \quad (146)$$

První dva členy  $\Delta L_N$  a  $\Delta L_T$  mají stejnou hodnotu jako u poloviny slabě zakřiveného kroužku, a proto se k vypočtení maximálního posunutí použijí vztahy (137) a (138), kde  $\Delta L_N$  je  $1,12 \cdot 10^{-3}$  mm a  $\Delta L_T$  je  $3,53 \cdot 10^{-3}$  mm. Provedením patřičných parciálních derivací a následných integrací se získají za vztahu (146) následující členy pro výpočet maximálního posunutí:

$$\Delta L_{M_o} = \frac{K \cdot R^3 \cdot p \cdot 3 \cdot \pi}{2 \cdot E \cdot S \cdot z_0} = \frac{20 \cdot 100^3 \cdot 0,3 \cdot 3 \cdot \pi}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 20^2 \cdot 0,334} = 1007,78 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad (147)$$

$$\Delta L_{M_oN} = -\frac{2 \cdot K \cdot R^2 \cdot p \cdot \pi}{E \cdot S} = -\frac{2 \cdot 20 \cdot 100^2 \cdot 0,3 \cdot \pi}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 20^2} = -4,49 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \quad (148)$$

Sečtením výsledných hodnot ze vztahů (137), (138), (147) a (148) byla získána hodnota maximálního posunutí v záporném smyslu osy y:

$$\begin{aligned} \Delta L = & 1,12 \cdot 10^{-3} + 3,53 \cdot 10^{-3} + 1007,78 \cdot 10^{-3} - 4,49 \cdot 10^{-3} \\ = & 1007,94 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \end{aligned} \quad (149)$$

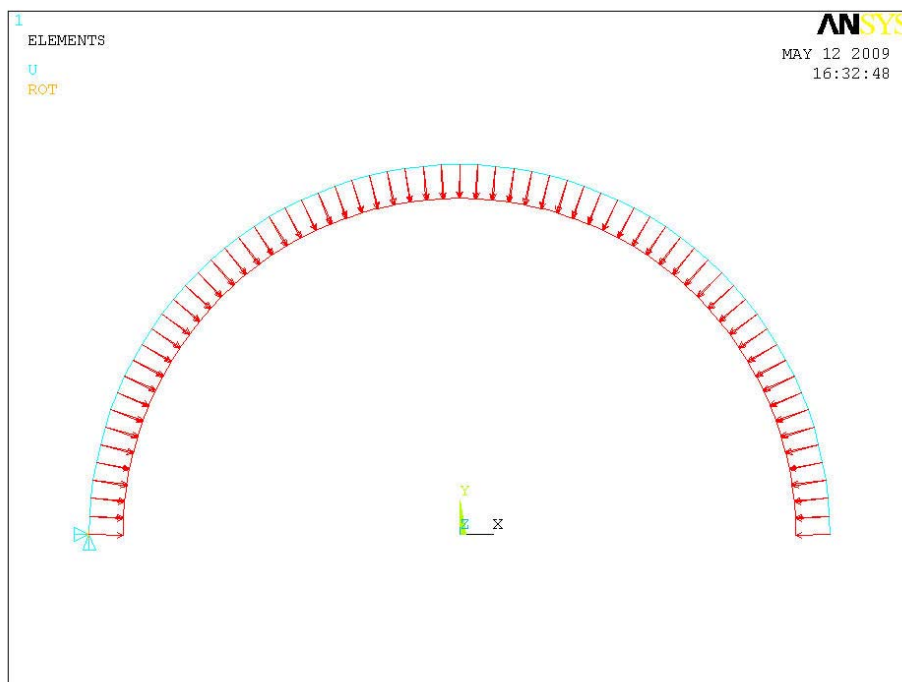
## 6.2 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

### 6.2.1 SLABĚ ZAKŘIVENÁ POLOVINA KROUŽKU

Pro polovinu slabě zakřiveného kroužku zatíženou tlakem po obvodu bylo v programu ANSYS 11.0 vytvořeno makro (viz. 9.3 Makro – polovina kroužku zatížená tlakem).

#### Zatížení a uložení kroužku

Uložení a zatížení je aplikováno shodně jako u analytického řešení. Zatížení tlakem je na Obr. 52 znázorněno červenými šipkami. Odebrané posuvy ve směru osy x a y jsou znázorněny modrými trojúhelníčky a odebraná rotace kolem osy z je označena žlutým křížkem v levé části křivého prutu.



Obr. 52 – Zatížení a uložení poloviny kroužku v programu ANSYS 11.0

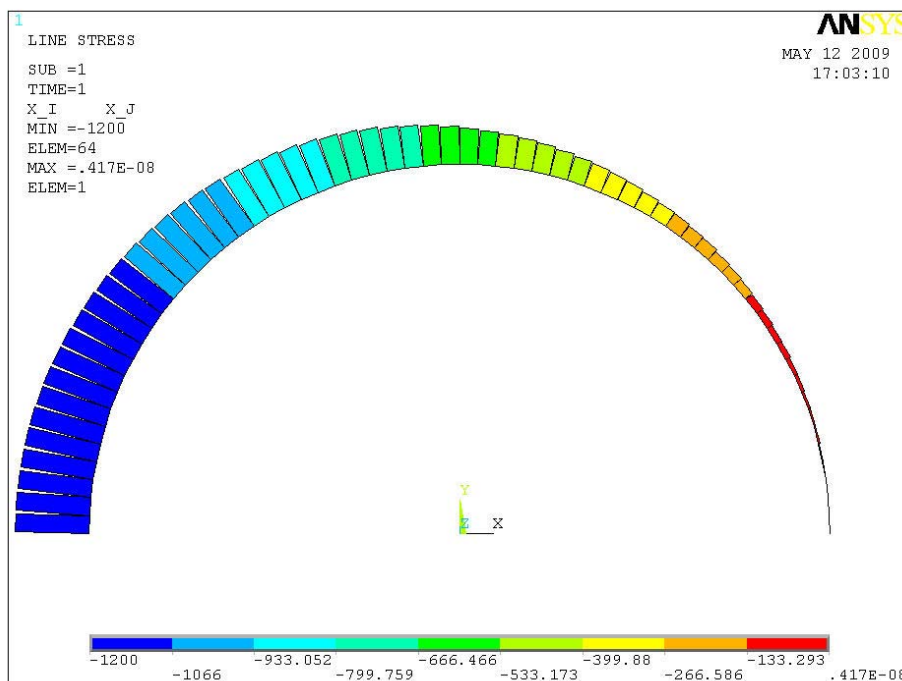
## Deformovaný tvar

Na Obr. 53 je modře znázorněn zdeformovaný tvar a černě původní tvar kroužku.

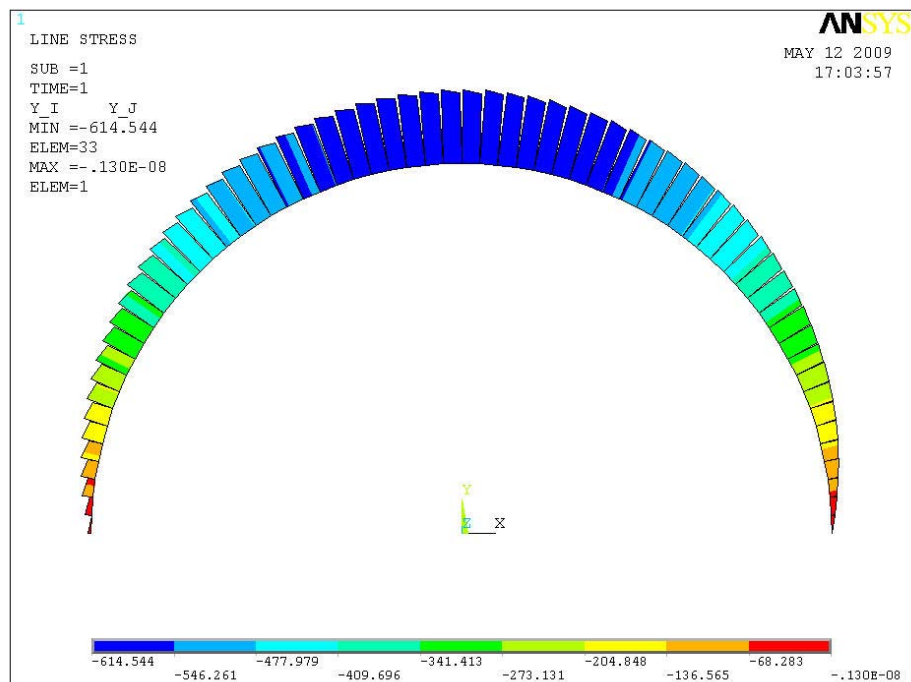


Obr. 53 – Zdeformovaný tvar

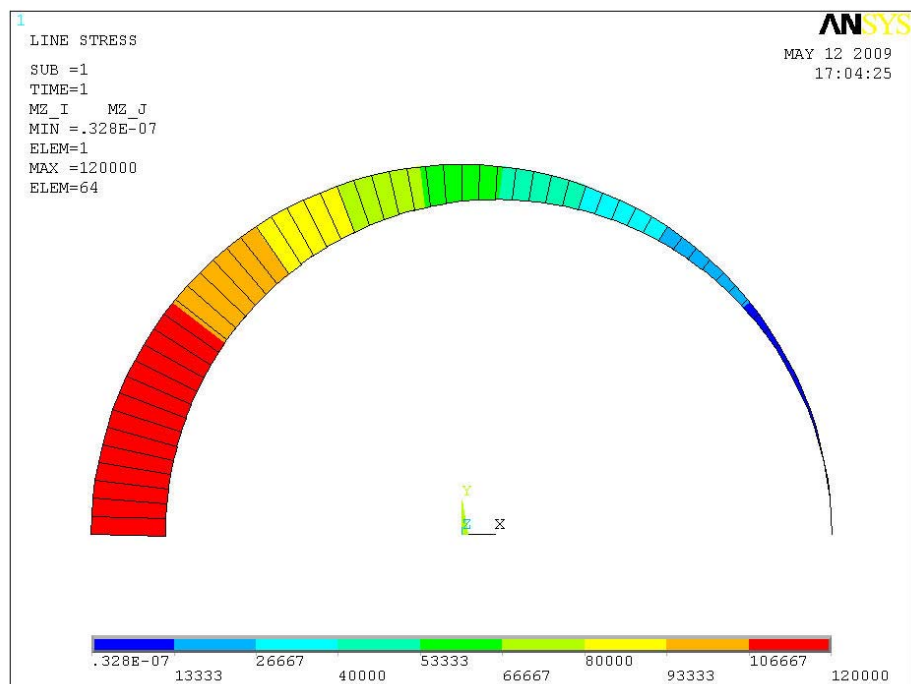
## Vykreslení výsledných vnitřních účinků



Obr. 54 – Průběh normálových sil N [N]



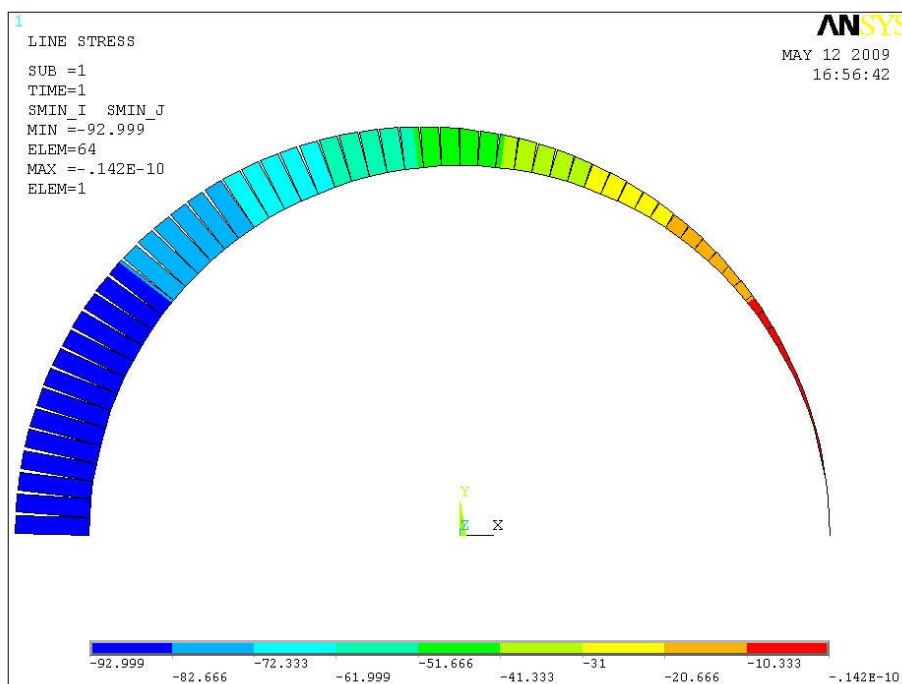
Obr. 55 – Průběh posouvajících sil  $T$  [N]



Obr. 56 – Průběh ohybových momentů  $M_o$  [N·mm]

## Určení výsledného maximálního napětí $\sigma_{\max}$

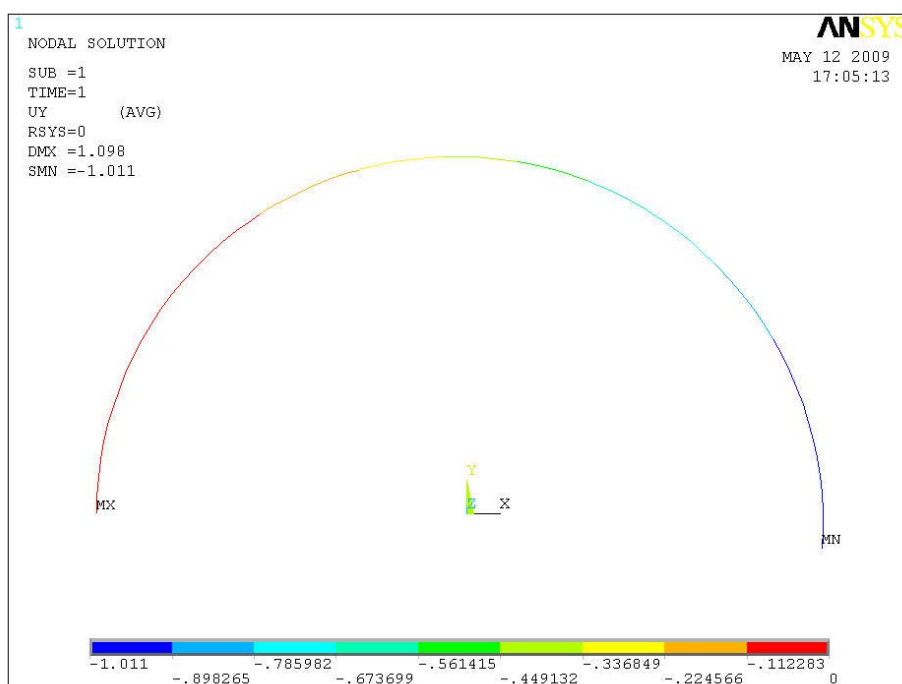
Pro porovnání výsledků se velikost maximálního napětí  $\sigma_{\max}$  uvede v absolutní hodnotě.



Obr. 57 – Průběh výsledného napětí [MPa]

## Určení maximálního posunutí $\Delta L$

Program ANSYS 11.0 vykreslil toto posunutí záporné podle orientace směru osy y. Pro porovnání výsledků se toto posunutí dosadí v absolutní hodnotě.



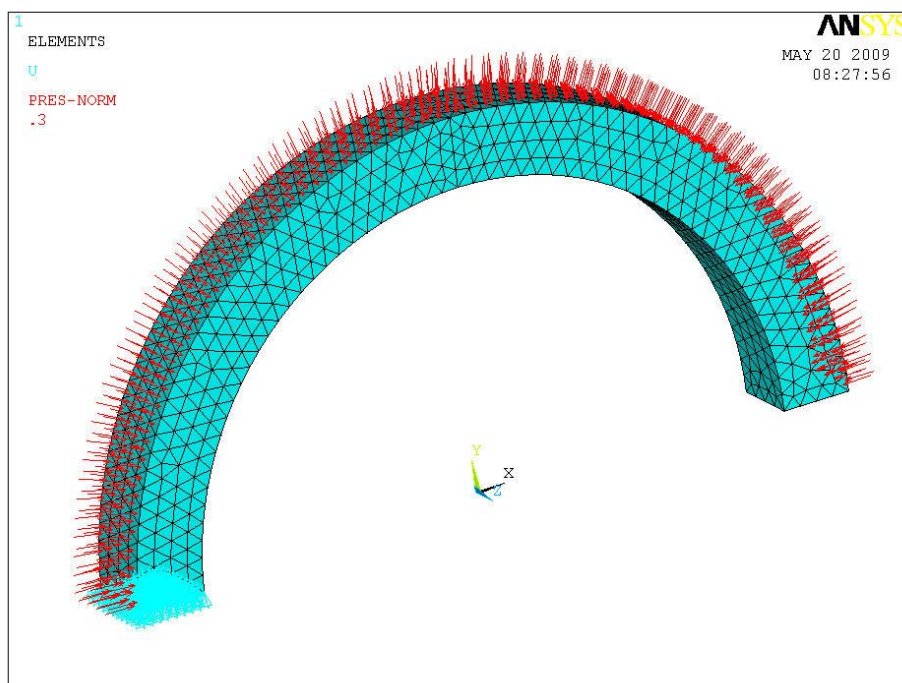
Obr. 58 – Zobrazení maximálního posunutí [mm]

## 6. 2. 2 SILNĚ ZAKŘIVENÁ POLOVINA KROUŽKU

Pro polovinu slabě zakřiveného kroužku zatíženou tlakem po obvodu bylo v programu ANSYS 11.0 vytvořeno makro (viz. 9.3 Makro – polovina kroužku zatížená tlakem).

### Zatížení a uložení kroužku

Zatížení tlakem je aplikováno na vnější plochu po obvodu poloviny kroužku. Na Obr. 59 je tlakové zatížení zobrazeno červenou barvou. Modré trojúhelníčky symbolizují odebrané posuvy v ose x,y i z.



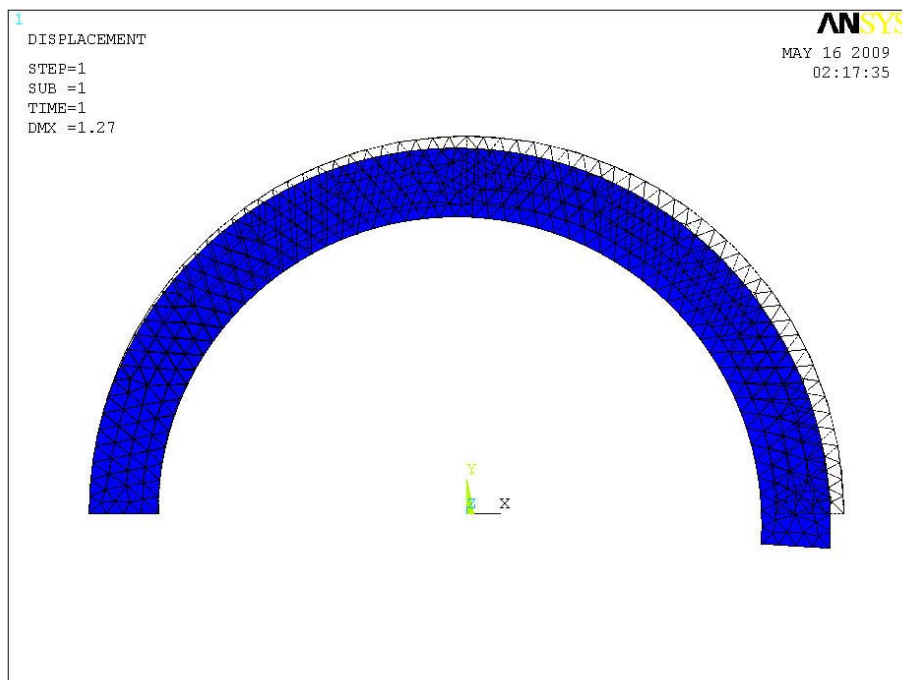
**Obr. 59 – Zatížení a uložení poloviny kroužku v programu ANSYS 11.0**

Vykreslení výsledných vnitřních účinků poloviny kroužku, řešené jako tlustý křivý prut je obdobné jako pro řešení poloviny slabě zakřiveného kroužku (viz. str. 61), a proto není nutné jej znovu vykreslovat.



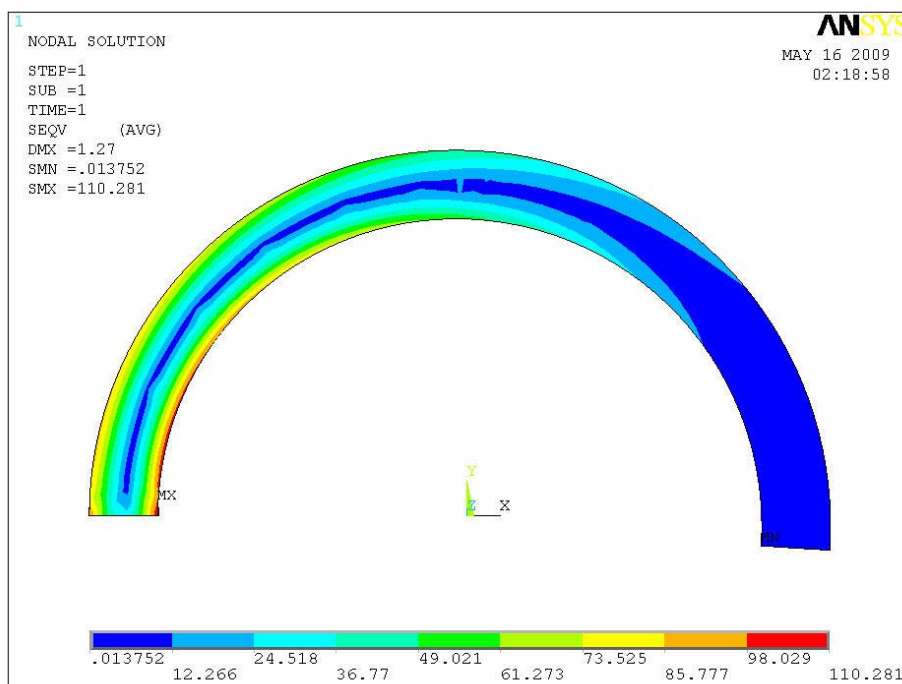
## Deformovaný tvar

Modrou barvou je na Obr. 60 znázorněn zdeformovaný tvar a černě původní tvar kroužku.

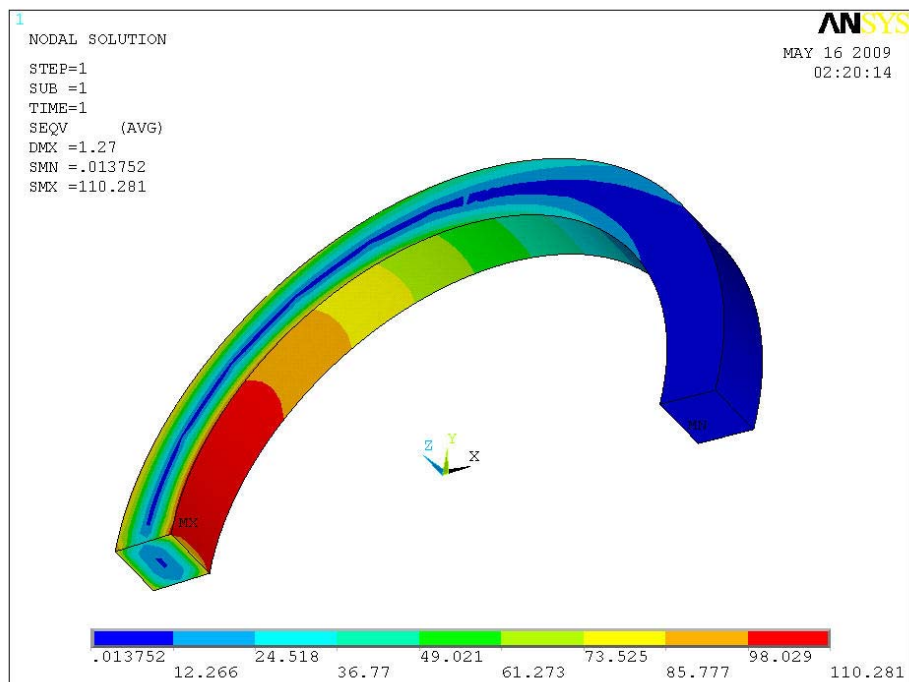


Obr. 60 – Zdeformovaný tvar

## Určení redukovaného napětí $\sigma_{red}$ dle hypotézy HMM



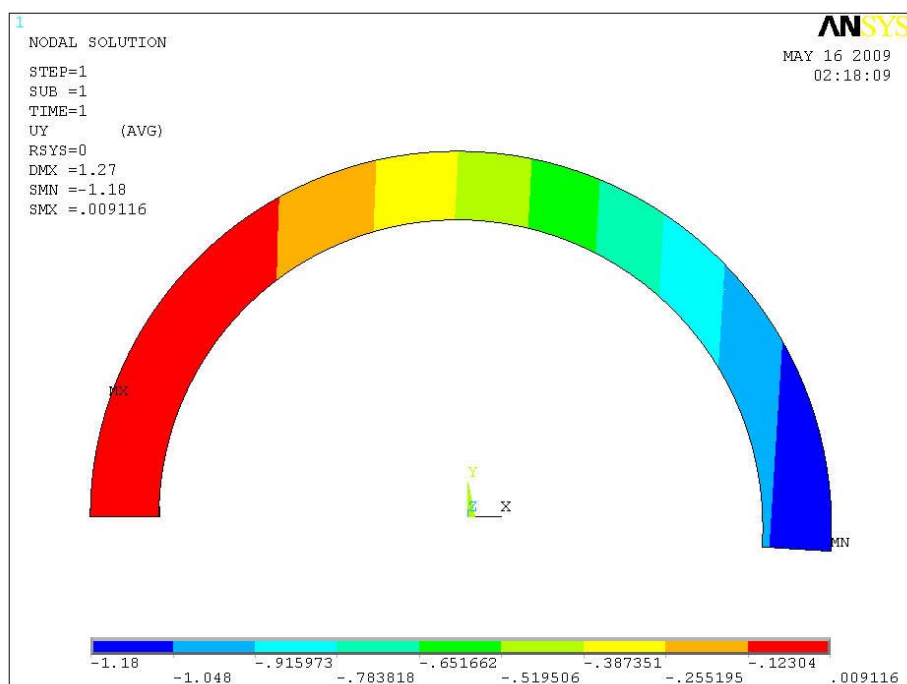
Obr. 61a – Rozložení napětí dle HMM hypotézy [MPa]



**Obr. 61b – Rozložení napětí dle HMM hypotézy [MPa] (pootočený pohled)**

### Určení maximálního posunutí $\Delta L$

Program ANSYS 11.0 vykreslil toto posunutí záporné podle orientace směru osy y. Pro porovnání výsledků se toto posunutí dosadí v absolutní hodnotě.



**Obr. 62 – Zobrazení maximálního posunutí [mm]**

### 6.3 POROVNÁNÍ DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ

#### POLOVINA KROUŽKU ZATÍŽENÁ TLAKEM

Porovnávaná veličina	ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ		Chyba [%]
	Teorie tenkých křivých prutů	Teorie tlustých křivých prutů	
<b>Napětí [MPa]</b>	-93,00	99,47	6,50
<b>Posunutí [mm]</b>	1,014	1,008	0,59

**Tab. 9 – Analytické porovnání výsledků podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů**

Porovnávaná veličina	NUMERICKÉ ŘEŠENÍ		Chyba [%]
	Teorie tenkých křivých prutů	Teorie tlustých křivých prutů	
<b>Napětí [MPa]</b>	-93,00	110,28	15,67
<b>Posunutí [mm]</b>	-1,011	-1,180	14,32

**Tab. 10 – Numerické porovnání výsledků podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů**

Porovnávaná veličina	POLOVINA KROUŽKU ŘEŠENÁ JAKO TENKÝ KŘIVÝ PRUT		Chyba [%]
	Analytické řešení	Numerické řešení	
<b>Napětí [MPa]</b>	-93,00	-93,00	0,00
<b>Posunutí [mm]</b>	1,014	-1,011	0,30

**Tab. 11 – Porovnání výsledků pro polovinu kroužku řešenou jako tenký křivý prut**

Porovnávaná veličina	POLOVINA KROUŽKU ŘEŠENÁ JAKO TLUSTÝ KŘIVÝ PRUT		Chyba [%]
	Analytické řešení	Numerické řešení	
<b>Napětí [MPa]</b>	99,47	110,28	9,80
<b>Posunutí [mm]</b>	1,008	-1,180	14,58

**Tab. 12 – Porovnání výsledků pro polovinu kroužku řešenou jako tlustý křivý prut**

## 7. ZÁVĚR

Bakalářská práce se zabývá analytickým a numerickým řešením různě zatížených kroužků, které je prováděno podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů. Zejména se pak zaměřuje na odlišnosti mezi výsledky dosaženými analyticky a výsledky zjištěné numerickou metodou konečných prvků pomocí programu ANSYS 11.0. Jelikož jsou rozměry kroužků záměrně voleny na hranici, podle níž se kroužek řeší jako slabě nebo silně zakřivený prut, provede se i vzájemné porovnání výsledků podle těchto teorií.

V práci jsou podrobně rozebrány tři různé typy zatížení působících na kroužek kruhového nebo čtvercového průřezu:

Nejdříve je analyzován kroužek kruhového průřezu zatěžovaný dvěma silami. Při jeho řešení se využívá pravidel symetrie a pro výpočet nám stačí brát v úvahu pouze čtvrtinu kroužku. Průběhy výsledných vnitřních účinků jsou vykresleny programem ANSYS 11.0. (viz. str. 30). Maximální napětí se nachází v místě působení zatěžující síly  $F/2$  a je pro čtvrtinu slabě zakřiveného kroužku vykresleno na Obr. 25 (str. 32) a pro čtvrtinu silně zakřiveného kroužku na Obr. 29a a 29b (str. 34 a 35). Maximální posunutí nastane v záporném smyslu osy  $x$  v místě působení zatěžující síly  $F/2$  (viz. Obr. 18, str. 25). Velikost tohoto posunutí je znázorněno pro slabě zakřivenou čtvrtinu kroužku na Obr. 26 (str. 32) a pro silně zakřivenou čtvrtinu kroužku na Obr. 30 (str. 35). Porovnáním výsledků podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů analytickou metodou je zjištěna odlišnost v napětí cca 7,1%, numerickou metodou je tato chyba 9,65%. Odchylka posunutí podle těchto teorií je do 5%. Jelikož je výpočet podle teorie tlustých křivých prutů přesnější (zohledňuje posunutí vzhledem ke střednici, atd.), tudíž i výsledky více odpovídají realitě, tak by se měly brát v potaz spíše výsledky docílené touto metodou. Dále jsou srovnány výsledky dosažené analytickým a numerickým řešením pro silně a slabě zakřivený kroužek. Tyto výsledky se od sebe neliší o více než 5%, proto jsou přijatelné.

Jako druhý příklad je uvažován rozměrově stejný kroužek, který je však zatěžován čtyřmi silami. Obdobně jako u předchozího příkladu se využije symetrie kroužku. Vlivem působení další síly  $P/2$ , která působí kolmo na původní sílu  $F/2$  se však změní průběh vnitřních výsledných účinků (viz. str. 46). Jelikož hodnota této síly  $P/2$  je menší v porovnání s hodnotou původní síly  $F/2$ , nachází se maximální napětí i posunutí (v záporném smyslu osy  $x$ )

ve stejném místě jako u předchozího příkladu (viz. Obr. 34 str. 41), to je v místě působení síly  $F/2$ . Průběh a rozložení napětí je pro slabě zakřivenou čtvrtinu kroužku vykreslen na Obr. 41 (str. 48) a pro silně zakřivenou čtvrtinu kroužku na Obr. 45a (str. 50) a Obr. 45b (str. 51). Velikost posunutí je pak znázorněno pro čtvrtinu kroužku, řešeného jako tenký křivý prut na Obr. 42 (str. 48) a pro čtvrtinu kroužku, řešeného jako tlustý křivý prut na Obr. 46 (str. 51). Porovnáním výsledků napětí podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů numerickou metodou je zjištěna odlišnost cca 7,1%, metodou analytickou je tato chyba cca 4%. Největší odlišnost ve srovnání výsledků posunutí je v numerickém řešení, tato chyba činí cca 4%. Pokud by se tedy jednalo o méně přesný výpočet (s chybou do 8%) mohla by se pro tento příklad použít teorie tenkých křivých prutů, která je podstatně jednodušší (nepočítá se poloměr neutrální osy, atd.). Při srovnání výsledků dosažených analytickým a numerickým výpočtem pro silně a slabě zakřivený kroužek se zjistilo, že se tyto výsledky od sebe neliší o více než 5%, proto jsou přijatelné.

V posledním případě je řešena polovina kroužku čtvercového průřezu zatížená tlakem po jeho vnějším obvodu. Uložení kroužku je realizováno vetknutím, tudíž při určování výsledných vnitřních účinků (viz. str. 61) se vycházelo z podmínek rovnováhy. Následnými výpočty se zjistilo, že maximální napětí se nachází v místě vetknutí. Průběh a rozložení napětí je pro řešení poloviny slabě zakřiveného kroužku vykreslen na Obr. 57 (str. 63) a pro polovinu silně zakřiveného kroužku na Obr. 61a (str. 65) a Obr. 61b (str. 66). Maximální posunutí se nachází v místě volného konce v záporném smyslu osy  $y$  (viz. Obr. 49 str. 56). Velikost tohoto posunutí je zobrazeno pro slabě zakřivenou polovinu kroužku na Obr. 58 (str. 63) a pro silně zakřivenou polovinu kroužku na Obr. 62 (str. 66). Porovnáním výsledků podle teorie tenkých a tlustých křivých prutů analytickou metodou je zjištěna odlišnost v napětí 6,5% a v posunutí 0,59%. Numerickou metodou je tato chyba pro napětí až 15,67% a pro posunutí 14,32%. Výsledky by se měly brát v úvahu od přesnější teorie, což je teorie tlustých křivých prutů. Řešení poloviny kroužku jako slabě zakřiveného prutu se v tomto příkladě nedoporučuje. Rozdíly mezi numerickými a analytickými výsledky pro polovinu kroužku řešenou jako tenký křivý prut jsou zanedbatelné, avšak pro řešení poloviny kroužku jako tlustého křivého prutu jsou dost vysoké. Hodnota chyby v porovnání napětí je 9,8% a v porovnání posunutí dokonce 14,58%. Což je pravděpodobně způsobeno tím, že při analytickém řešení se uvažuje zatížení na střednici poloviny kroužku, zatímco při numerickém řešení metodou konečných prvků, je zatížení aplikováno na vnější plochu poloviny kroužku.

## 8. SEZNAM POUŽITÝCH PRAMENŮ

- [1] Lenert, J. *Pružnost a pevnost I.* Skriptum VŠB – TU Ostrava, 2005. 2. vydání. ISBN 80 – 248 – 0113 – 2
- [2] Lenert, J. *Pružnost a pevnost II.* Skriptum VŠB – TU Ostrava, 2000. 1. vydání. ISBN 80 – 7078 – 572 – 1
- [3] Janíček, P. *Pružnost a pevnost II. v příkladech.* Skriptum VUT Brno, 1971. 1. vydání
- [4] Dobrovolný, B. *Pružnost a pevnost II. díl.* Česká grafická Unie a. s. Praha 1947. 2. vydání
- [5] Timošenko, Š. *Pružnost a pevnost II.* SNTL Praha 1951. 1. vydání
- [6] Kolektiv autorů. *Mechanika těles, Pružnost a pevnost I.* Skriptum VUT Brno, 1992
- [7] Kolektiv autorů. *Mechanika těles, Pružnost a pevnost II.* Skriptum VUT Brno, 1991
- [8] Valenta, F. a kolektiv. *Pružnost a pevnost III.* Skriptum ČVUT Praha, 2002
- [9] Řezníček, J. *Pružnost a pevnost II.* Skriptum ČVUT Praha, 2008
- [10] ANSYS User's Manuals (referenční příručky programu ANSYS od Swanson Analysis Systems, Inc.)

## 9. PŘÍLOHA

### 9.1 KROUŽEK ZATÍŽENÝ DVĚMA SILAMI

#### Slabě zakřivený kroužek

/prep7

!Zadavani vstupnich udaju

EVT=2.1e5	!Modul pružnosti v tahu [MPa]
PC=0.3	!Poissonova číslo [-]
SVY=0	!Síla ve směru osy Y [N] (nahoru kladná)
SVX=-3000	!Síla ve směru osy X [N] (doprava kladná)
PZ=100	!Polomer zakřivení [mm]
PK=20	!Průměr kroužku [mm]
VP=2	!Velikost prvku [mm]

!Algoritmus pro čtvrtinu kroužku v 1. kvadrantu

K,1,,,	!Zadáni KP
K,2,-PZ,0,,	
K,3,-PZ,PZ,,	
LARC,1,3,2,PZ,	!Tvorba čar
KDELE, 2	!Smazání KP
MPTEMP,,,,,,,,	!Materiál
MPTEMP,1,0	
MPDATA,EX,1,,EVT	
MPDATA,PRXY,1,,PC	
ET,1,BEAM3	!Typ Elementu
KEYOPT,1,6,1	
KEYOPT,1,9,0	
KEYOPT,1,10,0	
R,1,(3.1416*(PK*PK))/4,(3.1416*(PK*PK*PK*PK))/64,PK,, ,	
FLST,5,1,4,ORDE,1	!Sítování
FITEM,5,1	
CM,_Y,LINE	
LSEL, , , ,P51X	
CM,_Y1,LINE	
CMSEL,,_Y	
LESIZE,_Y1,VP, , , , ,1	
LMESH, 1	
FLST,2,1,3,ORDE,1	!Uložení nahore (v místě B)
FITEM,2,3	
DK,P51X, , , ,0,UX,ROTZ, , , ,	
FLST,2,1,3,ORDE,1	!Uložení dole (v místě A)
FITEM,2,1	
DK,P51X, , , ,0,UY,ROTZ, , , ,	
FLST,2,1,3,ORDE,1	!Síla v ose x
FITEM,2,1	
FK,P51X,FX,SVX/2	
FLST,2,1,3,ORDE,1	!Síla v ose y
FITEM,2,3	
FK,P51X,FY,SVY/2	
FINISH	!Výpočet
/SOLU	
/STATUS,SOLU	
SOLVE	
FINISH	

```

/POST1
eplot
PLDISP,2                                !Vykresleni VVU a napeti
AVPRIN,0,,
ETABLE,smax_i,NMISC, 1
AVPRIN,0,,
ETABLE,smax_j,NMISC, 3
AVPRIN,0,,
ETABLE,smin_i,NMISC, 2
AVPRIN,0,,
ETABLE,smin_j,NMISC, 4
AVPRIN,0,,
ETABLE,X_i,SMISC, 1
AVPRIN,0,,
ETABLE,X_j,SMISC, 7
AVPRIN,0,,
ETABLE,Y_i,SMISC, 2
AVPRIN,0,,
ETABLE,Y_j,SMISC, 8
AVPRIN,0,,
ETABLE,MZ_i,SMISC, 6
AVPRIN,0,,
ETABLE,MZ_j,SMISC, 12

```

### **Silně zakřivený kroužek**

```

/prep7

```

!Reseno pro rozmery: Polomer zakriveni 100 [mm], Prumer krouzku 20 [mm], Velikost prvku 3 [mm]

!Zadavani vstupnich udaju

```

EVT=2.1e5                                !Modul pruznosti v tahu [MPa]
PC=0.3                                    !Poissonova cislo [-]
SVY=0                                     !Sila ve smeru osy Y [N] (nahoru kladna)
SVX=-3000                                !Sila ve smeru osy X [N] (doprava kladna)

```

!Algoritmus pro ctvrtinu krouzku v 1. kvadrantu

```

K,1,,,,                                !Zadavani KP
K,2,-100,0,,
K,3,-100,100,,
LARC,1,3,2,100,                        !Tvorba car
KWPAVE, 3                               !Pracovni rovina
wprot,0,0,-90
FLST,2,2,8                             !Vytvoreni tazene Krivky
FITEM,2,-100,100,0
FITEM,2,-100,100,(20/2)
CIRCLE,P51X
FLST,2,4,4,ORDE,2                      !Tahnuti
FITEM,2,2
FITEM,2,-5
ADRAG,P51X, , , , , 1
FLST,2,4,4                             !Vytvoreni ploch
FITEM,2,3
FITEM,2,2
FITEM,2,5
FITEM,2,4
AL,P51X
FLST,2,4,4
FITEM,2,9

```



FITEM,2,11	
FITEM,2,13	
FITEM,2,6	
AL,P51X	
FLST,2,6,5,ORDE,2	!Vytvoreni objemu
FITEM,2,1	
FITEM,2,-6	
VA,P51X	
KDELE, 2	!Smazani KP a car
LDELE, 1, , ,1	
NUMMRG,ALL, , , ,LOW	!Imerg
MPTEMP,,,,,,,,	!Materiál
MPTEMP,1,0	
MPDATA,EX,1,,EVT	
MPDATA,PRXY,1,,PC	
ET,1,SOLID92	!Typ Elementu
KEYOPT,1,5,0	
KEYOPT,1,6,0	
ESIZE,3,0,	!Sitovani
MSHAPE,1,3D	
MSHKEY,0	
CM,_Y,VOLU	
VSEL, , , , 1	
CM,_Y1,VOLU	
CHKMSH,'VOLU'	
CMSEL,S,_Y	
VMESH,_Y1	
CMDELE,_Y	
CMDELE,_Y1	
CMDELE,_Y2	
epplot	
FLST,2,1,5,ORDE,1	!Ulozeni
FITEM,2,5	
DA,P51X,UX,	
FLST,2,1,5,ORDE,1	
FITEM,2,6	
DA,P51X,UY,	
ASEL,S, , , 6	!Sila v ose X - Vybrani uzlu
NSLA,S,1	
CM,Spodek_sila,NODE	!Vytvoreni komponenty
CMSEL,A,Spodek_sila	
FLST,2,1,9,ORDE,1	!Zadani hodnoty
FITEM,2,1	
F,P51X,FX,(SVX/2)/193	
allsel	
ASEL,S, , , 5	!Sila v ose y - Vybrani uzlu!
NSLA,S,1	
CM,Vrsek_sila,NODE	!Vytvoreni komponenty
CMSEL,A,Vrsek_sila	
FLST,2,1,9,ORDE,1	!Zadani hodnoty
FITEM,2,2	
F,P51X,FY,(SVY/2)/193	
allsel	
FINISH	!Vypocet
/POST1	
FINISH	
/SOL	
/STATUS,SOLU	
SOLVE	
/REP,FAST	

## 9. 2 KROUŽEK ZATÍŽENÝ ČTYŘMI SILAMI

### Slabě zakřivený kroužek

/prep7

!Zadavani vstupnich udaju

EVT=2.1e5	!Modul pružnosti v tahu [MPa]
PC=0.3	!Poissonova číslo [-]
SVY=-1000	!Síla ve směru osy Y [N] (nahoru kladná)
SVX=-3000	!Síla ve směru osy X [N] (doprava kladná)
PZ=100	!Poloměr zakřivení [mm]
PK=20	!Průměr kroužku [mm]
VP=1	!Velikost prvku [mm]

!Algoritmus pro čtvrtinu kroužku v 1. kvadrantu

K,1,,,,	!Zadáni KP
K,2,-PZ,0,,	
K,3,-PZ,PZ,,	
LARC,1,3,2,PZ,	!Tvorba čar
KDELE, 2	!Smazání KP
MPTEMP,,,,,,,,	!Materiál
MPTEMP,1,0	
MPDATA,EX,1,,EVT	
MPDATA,PRXY,1,,PC	
ET,1,BEAM3	!Typ Elementu
KEYOPT,1,6,1	
KEYOPT,1,9,0	
KEYOPT,1,10,0	
R,1,(3.1416*(PK*PK))/4,(3.1416*(PK*PK*PK*PK))/64,PK, , , ,	
FLST,5,1,4,ORDE,1	!Sítování
FITEM,5,1	
CM,_Y,LINE	
LSEL, , , ,P51X	
CM,_Y1,LINE	
CMSEL,,_Y	
LESIZE,_Y1,VP, , , , , ,1	
LMESH, 1	
FLST,2,1,3,ORDE,1	!Uložení nahore (v místě B)
FITEM,2,3	
DK,P51X, , , ,0,UX,ROTZ, , , , ,	
FLST,2,1,3,ORDE,1	!Uložení dole (v místě A)
FITEM,2,1	
DK,P51X, , , ,0,UY,ROTZ, , , , ,	
FLST,2,1,3,ORDE,1	!Síla v ose x
FITEM,2,1	
FK,P51X,FX,SVX/2	
FLST,2,1,3,ORDE,1	!Síla v ose y
FITEM,2,3	
FK,P51X,FY,SVY/2	
FINISH	!Výpočet
/SOLU	
/STATUS,SOLU	
SOLVE	
FINISH	
/POST1	
eplot	
PLDISP,2	!Vykreslení VVU a napětí
AVPRIN,0, ,	

```

ETABLE,smax_i,NMISC, 1
AVPRIN,0, ,
ETABLE,smax_j,NMISC, 3
AVPRIN,0, ,
ETABLE,smin_i,NMISC, 2
AVPRIN,0, ,
ETABLE,smin_j,NMISC, 4
AVPRIN,0, ,
ETABLE,X_i,SMISC, 1
AVPRIN,0, ,
ETABLE,X_j,SMISC, 7
AVPRIN,0, ,
ETABLE,Y_i,SMISC, 2
AVPRIN,0, ,
ETABLE,Y_j,SMISC, 8
AVPRIN,0, ,
ETABLE,MZ_i,SMISC, 6
AVPRIN,0, ,
ETABLE,MZ_J,SMISC, 12

```

## Silně zakřivený kroužek

/prep7

!Reseno pro rozmery:Polomer zakriveni 100 [mm], Prumer krouzku 20 [mm], Velikost prvku 3 [mm]

!Zadavani vstupnich udaju

EVT=2.1e5	!Modul pruznosti v tahu [MPa]
PC=0.3	!Poissonova cislo [-]
SVY=-1000	!Sila ve smeru osy Y [N] (nahoru kladna)
SVX=-3000	!Sila ve smeru osy X [N] (doprava kladna)

!Algoritmus pro ctvrtinu krouzku v 1. kvadrantu

K,1,,,	!Zadavani KP
K,2,-100,0,,	
K,3,-100,100,,	
LARC,1,3,2,100,	!Tvorba car
KWPAVE, 3	!Pracovni rovina
wprot,0,0,-90	
FLST,2,2,8	!Vytvoreni tazene Krivky
FITEM,2,-100,100,0	
FITEM,2,-100,100,(20/2)	
CIRCLE,P51X	
FLST,2,4,4,ORDE,2	!Tahnuti
FITEM,2,2	
FITEM,2,-5	
ADRAG,P51X, , , , , 1	
FLST,2,4,4	!Vytvoreni ploch
FITEM,2,3	
FITEM,2,2	
FITEM,2,5	
FITEM,2,4	
AL,P51X	
FLST,2,4,4	
FITEM,2,9	
FITEM,2,11	
FITEM,2,13	
FITEM,2,6	

AL,P51X	
FLST,2,6,5,ORDE,2	!Vytvoreni objemu
FITEM,2,1	
FITEM,2,-6	
VA,P51X	
KDELE, 2	!Smazani KP a car
LDELE, 1, , , 1	
NUMMRG,ALL, , , ,LOW	!Imerg
MPTEMP,,,,,,,,	!Materiál
MPTEMP,1,0	
MPDATA,EX,1,,EVT	
MPDATA,PRXY,1,,PC	
ET,1,SOLID92	!Typ Elementu
KEYOPT,1,5,0	
KEYOPT,1,6,0	
ESIZE,3,0,	!Sitovani
MSHAPE,1,3D	
MSHKEY,0	
CM,_Y,VOLU	
VSEL, , , , 1	
CM,_Y1,VOLU	
CHKMSH,'VOLU'	
CMSEL,S,_Y	
VMESH,_Y1	
CMDELE,_Y	
CMDELE,_Y1	
CMDELE,_Y2	
epplot	
FLST,2,1,5,ORDE,1	!Ulozeni
FITEM,2,5	
DA,P51X,UX,	
FLST,2,1,5,ORDE,1	
FITEM,2,6	
DA,P51X,UY,	
ASEL,S, , , 6	!Sila v ose X - Vybrani uzlu
NSLA,S,1	
CM,Spodek_sila,NODE	!Vytvoreni komponenty
CMSEL,A,Spodek_sila	
FLST,2,1,9,ORDE,1	!Zadani hodnoty
FITEM,2,1	
F,P51X,FX,(SVX/2)/193	
allsel	
ASEL,S, , , 5	!Sila v ose y - Vybrani uzlu!
NSLA,S,1	
CM,Vrsek_sila,NODE	!Vytvoreni komponenty
CMSEL,A,Vrsek_sila	
FLST,2,1,9,ORDE,1	!Zadani hodnoty
FITEM,2,2	
F,P51X,FY,(SVY/2)/193	
allsel	
FINISH	!Vypocet
/POST1	
FINISH	
/SOL	
/STATUS,SOLU	
SOLVE	
/REP,FAST	

### 9. 3 POLOVINA KROUŽKU ZATÍŽENÁ TLAKEM

#### Slabě zakřivená polovina kroužku

/prep7

!Zadavani vstupnich udaju

EVT=2.1e5	!Modul pružnosti v tahu [MPa]
PC=0.3	!Poissonova číslo [-]
ZTP=-0.3	!Zatížení tlakem [MPa] (rozpinání kladné - jedna se o SZ)
PZ=100	!Poloměr zakřivení [mm]
VPH=20	!Velikost strany [mm]
VP=5	!Velikost prvku [mm]

!Algoritmus pro polovinu kroužku v 1. a 2. kvadrant

FLST,2,2,8	!Vykreslení oblouku čarami (180°)
FITEM,2,0,0,0	
FITEM,2,PZ,0,0	
CIRCLE,P51X, , , ,180,1,	
MPTEMP,,,,,,,,	!Materiál
MPTEMP,1,0	
MPDATA,EX,1,,EVT	
MPDATA,PRXY,1,,PC	
ET,1,BEAM3	!Typ Elementu
KEYOPT,1,6,1	
KEYOPT,1,9,0	
KEYOPT,1,10,0	
R,1,(VPH*VPH),(VPH*VPH*VPH*VPH)/12,VPH, , , ,	
FLST,5,2,4,ORDE,2	!Sítování
FITEM,5,1	
FITEM,5,-2	
CM,_Y,LINE	
LSEL, , , , P51X	
CM,_Y1,LINE	
CMSEL,,_Y	
LESIZE,_Y1,VP, , , , , ,1	
FLST,2,2,4,ORDE,2	
FITEM,2,1	
FITEM,2,-2	
LMESH,P51X	
FLST,2,1,3,ORDE,1	!Uložení - (vlevo) vetknuto
FITEM,2,3	
DK,P51X, , , ,0,ALL, , , , , ,	
FLST,2,64,2,ORDE,2	!Zatížení tlakem (spojitým zatížením)
FITEM,2,1	
FITEM,2,-64	
SFBEAM,P51X,1,PRES,ZTP*VPH, , , , , ,	
FINISH	!Výpočet
/SOLU	
/STATUS,SOLU	
SOLVE	
FINISH	
/POST1	
epplot	
PLDISP,2	!Vykreslení VVU a napětí
AVPRIN,0, ,	
ETABLE,smax_i,NMISC, 1	
AVPRIN,0, ,	
ETABLE,smax_j,NMISC, 3	

```

AVPRIN,0, ,
ETABLE,smin_i,NMISC, 2
AVPRIN,0, ,
ETABLE,smin_j,NMISC, 4
AVPRIN,0, ,
ETABLE,X_i,SMISC, 1
AVPRIN,0, ,
ETABLE,X_j,SMISC, 7
AVPRIN,0, ,
ETABLE,Y_i,SMISC, 2
AVPRIN,0, ,
ETABLE,Y_j,SMISC, 8
AVPRIN,0, ,
ETABLE,MZ_i,SMISC, 6
AVPRIN,0, ,
ETABLE,MZ_J,SMISC, 12

```

## Silně zakřivená polovina kroužku

/prep7

/prep7

!Zadavani vstupnich udaju

```

EVT=2.1e5          !Modul pruznosti v tahu [MPa]
PC=0.3             !Poissonova cislo [-]
ZTP=0.3            !Zatizeni tlakem [MPa] (stlacovani kladne)
PZ=100             !Polomer zakriveni [mm]
VPH=20             !Velikost strany [mm]
VP=5               !Velikost prvku [mm]

```

!Algoritmus pro polovinu krouzku v 1.a 2. kvadrant

```

FLST,2,2,8          !Vykresleni oblouku carami (180°)
FITEM,2,0,0,0
FITEM,2,PZ,0,0
CIRCLE,P51X, , , ,180,1,
KWPAVE, , 1         !Pracovni rovina
wprot,-90,0,90
FLST,3,1,8          !Vytvoreni tazene krivky
FITEM,3,PZ+(VPH/2),0,-VPH/2
K, ,P51X
FLST,3,1,8
FITEM,3,PZ-(VPH/2),0,-VPH/2
K, ,P51X
FLST,3,1,8
FITEM,3,PZ-(VPH/2),0,VPH/2
K, ,P51X
FLST,3,1,8
FITEM,3,PZ+(VPH/2),0,VPH/2
K, ,P51X
LSTR, , 5, 4
LSTR, , 4, 7
LSTR, , 7, 6
LSTR, , 6, 5
FLST,2,4,4,ORDE,2   !Tahnuti
FITEM,2,3
FITEM,2,-6
FLST,8,2,4

```

```

FITEM,8,1
FITEM,8,2
ADRAG,P51X, , , , ,P51X
FLST,2,4,4          !Vytvoreni ploch
FITEM,2,20
FITEM,2,22
FITEM,2,15
FITEM,2,18
AL,P51X
FLST,2,4,4
FITEM,2,5
FITEM,2,4
FITEM,2,3
FITEM,2,6
AL,P51X
FLST,2,10,5,ORDE,2  !Vytvoreni objemu
FITEM,2,1
FITEM,2,-10
VA,P51X
FLST,2,2,4,ORDE,2   !Smazani car
FITEM,2,1
FITEM,2,-2
LDELE,P51X, , ,1
NUMMRG,ALL, , , ,LOW !Imerg
MPTEMP,,,,,,,,      !Materiál
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,EVT
MPDATA,PRXY,1,,PC
ET,1,SOLID92        !Typ Elementu
KEYOPT,1,5,0
KEYOPT,1,6,0
ESIZE,VP,0,         !Sitovani
CM,_Y,VOLU
VSEL, , , , 1
CM,_Y1,VOLU
CHKMSH,'VOLU'
CMSEL,S,_Y
VCLEAR,_Y1
VMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
eplot
FLST,2,1,5,ORDE,1   !Ulozeni - (vlevo) vetknuto
FITEM,2,9
DA,P51X,ALL,
FLST,2,2,5,ORDE,2   !Zatizeni tlakem
FITEM,2,2
FITEM,2,6
SFA,P51X,1,PRES,ZTP
FINISH              !Vypocet
/POST1
FINISH
/SOL
/STATUS,SOLU
SOLVE

```